



**TUGAS AKHIR -TE 1491599**

**KONTROL *TRACKING FUZZY* UNTUK SISTEM  
PENDULUM-KERETA MENGGUNAKAN PENDEKATAN  
*LINEAR MATRIX INEQUALITIES* (LMI)**

Rizki Wijayanti  
NRP 2215 105 022

Dosen Pembimbing  
Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.

DEPARTEMEN TEKNIK ELEKTRO  
Fakultas Teknologi Elektro  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2017



***FINAL PROJECT -TE 141599***

***FUZZY TRACKING CONTROL FOR PENDULUM-CART  
SYSTEM USING LINEAR MATRIX INEQUALITIES  
APPROACH***

Rizki Wijayanti  
NRP 2215 105 022

*Supervisor*  
Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.

***ELECTRICAL ENGINEERING DEPARTEMENT  
Faculty of Electrical Technology  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2017***

## PERNYATAAN KEASLIAN TUGAS AKHIR

Dengan ini saya menyatakan bahwa isi sebagian maupun keseluruhan Tugas Akhir saya dengan judul “**Kontrol Tracking Fuzzy Untuk Sistem Pendulum-Kereta Menggunakan Pendekatan Linear Matrix Inequalities (LMI)**” adalah benar benar hasil karya intelektual mandiri, diselesaikan tanpa menggunakan bahan-bahan yang tidak diijinkan dan bukan merupakan karya pihak lain yang saya akui sebagai karya sendiri.

Semua referensi yang dikutip maupun dirujuk telah ditulis secara lengkap pada daftar pustaka. Apabila ternyata pernyataan ini tidak benar, saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Surabaya, Juli 2017



Rizki Wijayanti  
Nrp. 2215105022

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

**KONTROL TRACKING FUZZY UNTUK SISTEM PENDULUM-  
KERETA MENGGUNAKAN PENDEKATAN LINEAR MATRIX  
INEQUALITIES  
TUGAS AKHIR**

**Diajukan untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Teknik  
Pada  
Bidang Studi Teknik Sistem Pengaturan  
Jurusan Teknik Elektro  
Fakultas Teknologi Industri  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

**Menyutujui:**

**Dosen Pembimbing,**

*Trihastuti*

**Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.**  
**NIP: 196808121994032001**



*Halaman ini sengaja dikosongkan*

# KONTROL *TRACKING FUZZY* UNTUK SISTEM PENDULUM-KERETA MENGGUNAKAN PENDEKATAN *LINEAR MATRIX INEQUALITIES*

Nama : Rizki Wijayanti  
Pembimbing : Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.

## ABSTRAK

Sistem Pendulum Kereta adalah suatu *plant nonlinear* dan tidak stabil yang terdiri dari batang pendulum yang berayun searah atau berlawanan arah jarum jam dan bersumbu pada kedua sisi kereta yang dapat bergerak secara horisontal. Tugas Akhir ini membahas tentang kontrol *tracking* berbasis model *servo* tipe 1 dengan *plant* tanpa *integrator* agar Sistem Pendulum Kereta mampu bergerak mengikuti sinyal referensi berupa sinyal *step*. Model *nonlinear* Sistem Pendulum Kereta direpresentasikan dengan model *fuzzy* Takagi-Sugeno dengan didasarkan aturan PDC (*Parallel Distributed Compensation*) untuk memperoleh aturan kontroler. *Gain state feedback* dan *gain integrator* diperoleh dengan menggunakan pendekatan LMI (*Linear Matrix Inequalities*). Hasil simulasi menunjukkan bahwa posisi kereta mampu mengikuti sinyal referensi berupa sinyal dengan nilai IAE (*Integral Absolute Error*) sebesar 0,1986 m.

Kata Kunci: Sistem Pendulum Kereta, *Tracking*, *Fuzzy* Takagi Sugeno, Sistem *Servo* Tipe 1, *Linear Matrix Inequalities*

*Halaman ini sengaja dikosongkan*



# ***FUZZY TRACKING CONTROL FOR PENDULUM-CART SYSTEM USING LINEAR MATRIX INEQUALITIES APPROACH***

***Name*** : Rizki Wijayanti

***Supervisor*** : Dr. Trihastuti Agustinah, ST., MT.

## **ABSTRACT**

*The pendulum- cart system is a plant nonlinear and unstable that consists of a pendulum which swinging up and pinned on both sides of chart that can move on a trajectory with the horizontal axis. This final project discusses about tracking control based on Type 1 Servo Sistem when the plant has no integrator so that the pendulum- cart system is able to follow the reference step signal. The nonlinear models of pendulum-cart system can be represented by Takagi-Sugeno fuzzy models following the rule of the PDC (Parallel Distributed Compensation) to obtain rule of controller. The state feedback gain is obtained using LMI (Linear Matrix Inequalities) approach. The results of simulation show that pendulum-cart system is able to follow the reference step signal without any phase between the cart position response with value of IAE (Integral Absolute error) is 0.1986 m.*

***Key Words:*** Cart-Pendulum System, Tracking, Fuzzy Takagi Sugeno, Type 1 Servo System, Linear Matrix Inequalities

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## KATA PENGANTAR

Puji Syukur kehadiran Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan Rahmat dan Karunianya sehingga dapat diselesaikannya Tugas akhir yang berjudul “**Kontrol *Tracking Fuzzy* Untuk Sistem Pendulum-Kereta Menggunakan Pendekatan *Linear Matrix Inequalities* (LMI)**” dengan baik. Dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Trihastuti Agustinah, S.T., M.T. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan saran, rekomendasi dan masukan dalam Tugas Akhir ini.
2. Ayah dan Ibu yang telah memberikan banyak doa, motivasi dan semangat dalam mengerjakan Tugas Akhir ini.
3. Teman-Teman LJ 2015 dan teman-teman Sistem Pengaturan.

Penulis menyadari bahwa pengerjaan Tugas Akhir ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis memohon maaf atas segala kekurangan dalam buku Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan manfaat bagi kita semua.

Demikian kata-kata dari penulis, dan penulis sangat berharap adanya masukan guna penyempurnaan Tugas Akhir. Terimakasih

Surabaya, 2017



Penulis

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL .....</b>	<b>i</b>
<b>PERNYATAAN KEASLIAN TUGAS AKHIR.....</b>	<b>iii</b>
<b>LEMBAR PENGESAHAN .....</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRAK .....</b>	<b>vii</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>ix</b>
<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR.....</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR TABEL .....</b>	<b>xvii</b>
<b>BAB 1 PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Perumusan Masalah .....	2
1.3 Batasan Masalah .....	2
1.4 Tujuan Penelitian .....	2
1.5 Metodologi Penelitian.....	2
1.6 Sistematika Penulisan .....	3
1.7 Relevansi .....	4
<b>BAB 2 TEORI PENUNJANG .....</b>	<b>5</b>
2.1 Tinjauan Pustaka.....	5
2.2 Sistem Pendulum Kereta.....	6
2.2.1 Model Fisik Sistem.....	7
2.2.2 Model Matematis Sistem Pendulum Kereta .....	9
2.3 Linearisasi.....	10
2.4. Teori <i>Fuzzy</i> .....	13
2.4.1 Himpunan <i>Fuzzy</i> .....	13
2.4.2 Fungsi Keanggotaan <i>Fuzzy</i> .....	13
2.4.3 Operasi Himpunan <i>Fuzzy</i> .....	16
2.4.4 Sistem Inferensi <i>Fuzzy</i> .....	17
2.5 Model <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno .....	17
2.6 Sistem Kontrol <i>Tracking</i> .....	19
2.6.1 <i>Servo</i> Tipe 1 .....	20
2.6.2 Analisa Kestabilan Lyapunov.....	21
2.6.3 <i>Linear Matrix Inequalities</i> (LMI).....	22

<b>BAB 3 PERANCANGAN SISTEM .....</b>	<b>25</b>
3.1 Linearisasi .....	25
3.2 Kontrol <i>Tracking Fuzzy</i> .....	27
3.3 Analisa Kestabilan Lyapunov.....	30
3.4 <i>Linear Matrix Inequalities</i> (LMI).....	31
3.5 Perancangan Simulasi.....	32
<b>BAB 4 HASIL DAN ANALISA .....</b>	<b>35</b>
4.1 Hasil Simulasi .....	35
4.1.1 Simulasi Menggunakan Sinyal <i>Step</i> .....	35
4.1.2 Simulasi Menggunakan Sinyal Sinus.....	46
<b>BAB 5 PENUTUP .....</b>	<b>51</b>
5.1 Kesimpulan.....	51
5.2 Saran.....	51
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>	<b>53</b>
<b>LAMPIRAN .....</b>	<b>55</b>
<b>RIWAYAT HIDUP.....</b>	<b>75</b>

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2.1</b>	Bagian Mekanik dan Tata Letak <i>Sensor</i> .....	6
<b>Gambar 2.2</b>	Sistem Pendulum Kereta Secara Keseluruhan .....	7
<b>Gambar 2.3</b>	Diagram Fisik Sistem Pendulum Kereta .....	8
<b>Gambar 2.4</b>	Komponen Gaya Sistem Pendulum Kereta.....	8
<b>Gambar 2.5</b>	Linearisasi $y = f(x)$ pada Sekitar $x^*$ .....	11
<b>Gambar 2.6</b>	Fungsi Keanggotaan Segitiga .....	14
<b>Gambar 2.7</b>	Fungsi Keanggotaan Trapesium .....	15
<b>Gambar 2.8</b>	Fungsi Keanggotaan <i>Gaussian</i> .....	15
<b>Gambar 2.9</b>	Fungsi keanggotaan <i>Genarlized Bell</i> .....	16
<b>Gambar 2.10</b>	Konsep <i>Parallel Distributed Compensation</i> (PDC) ....	19
<b>Gambar 2.11</b>	Sistem Kontrol <i>Tracking</i> Model <i>Servo</i> Tipe 1 .....	20
<b>Gambar 3.1</b>	Fungsi Keanggotaan M1, M2 dan M3 .....	30
<b>Gambar 3.2</b>	Lokasi <i>Pole</i> dari Lingkaran Daerah D .....	32
<b>Gambar 3.3</b>	Diagram Simulink untuk Simulasi.....	33
<b>Gambar 4.1</b>	Posisi Kereta pada Simulasi Variasi Penempatan <i>Pole</i> .....	39
<b>Gambar 4.2</b>	Sudut Pendulum pada Simulasi Variasi Penempatan <i>Pole</i> .....	40
<b>Gambar 4.3</b>	Sinyal Kontrol pada Simulasi Variasi Penempatan <i>Pole</i> .....	41
<b>Gambar 4.4</b>	Posisi Kereta pada Simulasi dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum.....	42
<b>Gambar 4.5</b>	Sudut Pendulum pada Simulasi dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum.....	43
<b>Gambar 4.6</b>	Gangguan Pada Sinyal Kontrol.....	44
<b>Gambar 4.7</b>	Posisi Kereta dengan Gangguan .....	45
<b>Gambar 4.8</b>	Sudut Pendulum dengan Gangguan .....	45
<b>Gambar 4.9</b>	Posisi Kereta pada Simulasi Variasi Penempatan <i>Pole</i> dengan Referensi Sinyal Sinus .....	46
<b>Gambar 4.10</b>	Sudut Pendulum pada Simulasi Variasi Penempatan <i>Pole</i> dengan Referensi Sinus .....	47
<b>Gambar 4.11</b>	Posisi Kereta dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum .....	48
<b>Gambar 4.12</b>	Sudut Pendulum dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum.....	48

*Halaman ini sengaja dikosongkan*



## DAFTAR TABEL

<b>Tabel 2.1</b>	Parameter-Parameter yang Digunakan Dalam Sistem Pendulum Kereta .....	9
<b>Tabel 4.1</b>	Nilai <i>Pole</i> Sistem <i>Loop</i> Tertutup untuk Tiap Model pada Penempatan <i>Pole</i> Pertama.....	36
<b>Tabel 4.2</b>	Nilai <i>Pole</i> Sistem <i>Loop</i> Tertutup untuk Tiap Model pada Penempatan <i>Pole</i> Kedua .....	37
<b>Tabel 4.3</b>	Nilai <i>Pole</i> Sistem <i>Loop</i> Tertutup untuk Tiap Model pada Penempatan <i>Pole</i> Ketiga .....	38
<b>Tabel 4.4</b>	Perbandingan Hasil Simulasi dengan Berbagai Penempatan <i>Pole</i> .....	41

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

# BAB 1

## PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai pendahuluan dari pelaksanaan Tugas Akhir ini. Pendahuluan tersebut meliputi latar belakang, berdasarkan latar belakang tersebut dapat dirumuskan permasalahan, batasan masalah, dan tujuan dari Tugas Akhir ini. Kemudian dibahas mengenai metodologi, sistematika penulisan dan relevansi dari Tugas Akhir yang dikerjakan.

### 1.1 Latar Belakang

Dengan semakin berkembangnya kemajuan teknologi dan semakin berkembang pula sistem *nonlinear* di kehidupan, maka dibutuhkan sistem kontrol yang tepat untuk suatu sistem dapat menghasilkan respon yang baik. Sistem Pendulum Kereta merupakan salah satu sistem yang sangat penting untuk penelitian di bidang kontrol. Berbagai teori metode kontrol banyak diuji dan dibandingkan melalui pengujian terhadap Sistem Pendulum Kereta. Hal ini dikarenakan Sistem Pendulum Kereta merupakan sistem *nonlinear* dan tidak stabil serta dapat dilinearkan di sekitar titik keseimbangannya. Sistem Pendulum Kereta adalah suatu *plant* yang terdiri dari batang pendulum yang bergerak secara rotasi searah atau berlawanan arah jarum jam dan bersumbu pada kedua sisi kereta yang dapat bergerak secara vertikal pada suatu lintasan.

Permasalahan utama pada Sistem Pendulum Kereta adalah *swing-up*, *tracking* (mengikuti sinyal referensi), dan stabilisasi. Tujuan utama dari Tugas Akhir ini adalah mengatur posisi kereta sesuai dengan sinyal referensi yang diberikan dengan tetap mempertahankan batang pendulum pada posisi ekuilibriumnya. Sinyal referensi yang diberikan pada Tugas Akhir ini berupa sinyal *step*.

Beberapa metode telah dikembangkan untuk menangani permasalahan *tracking*. Pada [1] kontrol *tracking* menggunakan model *fuzzy* T-S berbasis kontrol optimal. Kontrol *tracking* berbasis model *following* telah dikembangkan pada [2]. Sistem kontrol *tracking* berbasis Sistem *Servo* Tipe 1 untuk *plant* tanpa *integrator* juga telah diterapkan pada [3] dengan menggunakan metode *pole placement*.

Penyelesaian permasalahan dari Sistem Pendulum Kereta menggunakan desain Sistem *Servo* Tipe 1 dengan *plant* tanpa *integrator* menggunakan pendekatan LMI (*Linear Matrix Inequality*) untuk bisa mendapatkan nilai *gain* kontroler dan *gain integrator* diharapkan dapat memberikan respon yang lebih baik agar *plant* dapat mengikuti sinyal referensi berupa sinyal *step*. Karakteristik Sistem Pendulum Kereta yang *nonlinear* direpresentasikan ke dalam model *linear* dengan model *fuzzy* T-S yang didasarkan pada aturan PDC (*Parallel Distributed Compensation*).

## 1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan pada Tugas Akhir ini adalah bagaimana respon sistem dapat mengikuti sinyal referensi berupa sinyal *step* melalui optimasi menggunakan LMI.

Hasil desain kontroler disimulasikan menggunakan *software* Matlab/Simulink dengan menggunakan struktur Sistem *Servo* 1 untuk *plant* tanpa *integrator*.

## 1.3 Batasan Masalah

Pada Tugas Akhir ini terdapat batasan-batasan masalah diantaranya:

1. Desain kontroler dibuat menggunakan model *fuzzy* T-S berdasarkan konsep PDC.
2. Struktur kontrol *tracking* menggunakan Sistem *Servo* Tipe 1.
3. Sinyal referensi yang digunakan adalah sinyal *step*.
4. Kontrol *tracking* diberikan untuk posisi kereta dengan spesifikasi sinyal referensi yang telah ditentukan.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan merancang kontrol *fuzzy* T-S menggunakan pendekatan LMI dengan batasan penempatan *pole*. Hasil yang diharapkan adalah nilai IAE (*Integral Error Tracking*) mendekati nol dengan sinyal referensi *step* melalui optimasi menggunakan LMI.

## 1.5 Metodologi Penelitian

1. Studi Literatur

Pada tahap ini, hal-hal yang akan dipelajari adalah:

- a. Identifikasi fisik *plant* pendulum Sistem Pendulum Kereta
- b. Sistem *Servo* Tipe 1 untuk *plant* tanpa *integrator*

- c. Desain kontrol fuzzy T-S
  - d. LMI(*Linearisasi Matrix Inequalities*)
- 2. Pemodelan Sistem  
 Pada tahap ini akan memodelkan persamaan *state space* yang mempresentasikan Sistem Pendulum Kereta dari hasil identifikasi fisik
- 3. *Linearisasi*  
 Agar teori kontrol *linear* dapat diterapkan dalam desain kontroler, maka model *nonlinear* sistem harus di-*linearisasikan* pada titik kerja yang diinginkan untuk bias mendapatkan nilai *gain* kontroler.
- 4. Perancangan kontroler  
 Pada tahap ini akan dihitung *gain state-feedback* dan gain inntegral dengan menggunakan pendekatan LMI.
- 5. Simulasi  
 Hasil pemodelan sistem dan perancangan kontroler disimulasikan terlebih dahulu sebelum diimplementasikan dengan menggunakan bantuan *software* Matlab/simulink.
- 6. Penyusunan buku tugas Akhir  
 Menyusun buku Tugas Akhir yang terdiri dari pendahuluan, teori dasar, perancangan sistem, hasil simulasi, implementasi dan penutup

## 1.6 Sistematika Penulisan

Pada Tugas Akhir ini sistematika penulisan akan dibagi menjadi lima bab yaitu:

### **BAB 1 : PENDAHULUAN**

Bab ini meliputi latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, metodologi penelitian dan sistematika laporan.

### **BAB 2 : TEORI PENUNJANG**

Bab ini membahas tinjauan pustaka, konsep dari Sistem Pendulum Kereta, linearisasi, teori logika *fuzzy*, model *fuzzy* Takagi-Sugeno, sistem *servo* tipe 1, analisa kestabilan Lyapunov, LMI (*Linear Matrix Inequalities*).

**BAB 3 : PERANCANGAN SISTEM**

Bab ini menjelaskan desain dan perancangan kontrol *tracking* Sistem Pendulum Kereta dan algoritma kontrol *fuzzy* dengan menggunakan sistem *servo* tipe 1 untuk *plant* tanpa *integrator*.

**BAB 4 : HASIL DAN ANALISA**

Bab ini membahas tentang hasil dan analisa dari simulasi yang telah dilakukan.

**BAB 5 : PENUTUP**

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran dari hasil keseluruhan proses perancangan, pembuatan, dan pengujian dari kontrol *tracking fuzzy* menggunakan struktur *servo* tipe 1 untuk Sistem Pendulum Kereta.

**1.7 Relevansi**

Dengan diselesaikannya tugas akhir ini diharapkan dapat menjadi kontribusi pada penelitian dalam mengembangkan strategi dan struktur kontrol untuk *plant nonlinear* dari Sistem Pendulum Kereta dengan kontrol *tracking fuzzy* menggunakan pendekatan LMI (*Linear Matrix inequalities*) dengan struktur sistem *servo* tipe 1.

## BAB 2

### TEORI PENUNJANG

Pada bab ini membahas tentang teori penunjang yang digunakan dalam pemecahan masalah dalam pelaksanaan Tugas Akhir ini. Di bagian pertama membahas tentang tinjauan pustaka yang menggambarkan landasan teori secara umum yang akan di gunakan pada Tugas Akhir ini. pada bagian kedua, membahas tentang sistem pendulum kereta yang meliputi model fisik sistem pendulum kereta dan model matematis sitem pendulum kereta. Selanjutnya, membahas tentang konsep linearisasi, logika *fuzzy*, analisa kestabilan Lyapunov dan *Linear Matrix Inequality* (LMI)

#### 2.1 Tinjauan Pustaka

Terdapat metode yang dapat digunakan untuk mengatasi masalah *tracking* pada Sistem Pendulum Kereta. Permasalahan *tracking* adalah mengatur sistem agar keluaran sesuai dengan referensi.

Pada [1] membahas desain sistem kontrol *tracking* menggunakan model *fuzzy* Takagi-Sugeno untuk merepresentasikan model nonlinear sistem pendulum kereta untuk beberapa titik kerja, kemudian kontroler *state feedback* disusun menggunakan konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC) berbasis teknik kontrol optimal.

Pada [2] kontrol *tracking* sistem pendulum kereta menggunakan struktur kontrol berbasis model following. Model *fuzzy* Takagi-Sugeno digunakan untuk merepresentasikan model nonlinear sistem pendulum kereta. *State feedback gain* dan *gain* kompensator diperoleh dengan menggunakan *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

Pada [3] kontrol *tracking* menggunakan kontrol *fuzzy* Takagi-Sugeno yang berbasis Sistem *Servo* Tipe 1 dengan *plant* tanpa integrator agar Sistem Pendulum Kereta dapat mengikuti sinyal referensi *step* dan sinyal referensi *square wave*. Model *nonlinear plant* Sistem Pendulum Kereta direpresentasikan dengan model *fuzzy* Takagi-Sugeno dengan menggunakan aturan PDC.

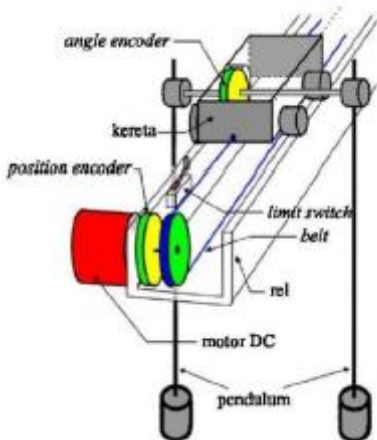
Pada [4] model nonlinear Sistem Pendulum Kereta akan direpresentasikan dalam model *Fuzzy* Takagi-Sugeno untuk dua titik kerja, dan menggunakan aturan kontroler berdasarkan konsep PDC Modifikasi. Sistem kontrol *tracking* yang digunakan adalah model

kopensator, *state feedback gain* dan *gain* kompensator diperoleh dengan menggunakan teknik *pole placement*.

## 2.2 Sistem Pendulum Kereta [5]

Sistem Pendulum Kereta merupakan sebuah benchmark yang digunakan untuk menguji suatu metode kontrol. Sistem Pendulum kereta merupakan sistem *nonlinear*. Sistem Pendulum Kereta terdiri dari sepasang batang pendulum yang bebas berayun secara vertikal dan terpasang pada kereta yang bergerak horizontal pada suatu lintasan dengan panjang lintasan tertentu.

Kereta digerakkan sepanjang lintasan terbatas oleh motor DC yang di hubungkan dengan *belt*. Pada ujung-ujung rel terdapat *limit switch* yang berfungsi sebagai pengaman pergerakan kereta. Ketika kereta berada pada ujung lintasan dan mengenai *limit switch* maka motor DC akan mati dan kereta akan berhenti bergerak. Sedangkan sudut batang pendulum terhadap sumbu vertikal yang disebabkan oleh gerakan kereta dipantau oleh *angle encoder*. Susunan dan tata letak sensor yang digunakan pada sistem pendulum kereta dapat dilihat pada Gambar 2.1.

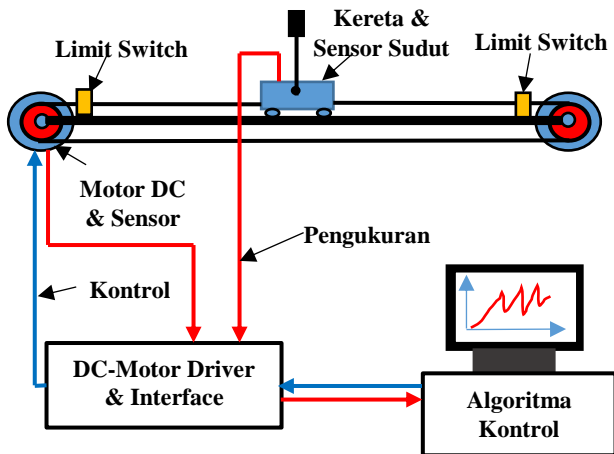


**Gambar 2. 1** Bagian Mekanik dan Tata Letak Sensor [5]

Pada implementasinya Sistem Pendulum Kereta yang digunakan adalah tipe “*Digital Pendulum Mechanical Unit 33-200*” dari Feedback Instrument Ltd. Pada penerapan sistem kontrolnya menggunakan bantuan perangkat lunak Matlab dan Simulink. Komputer dan Sistem Pendulum Kereta dihubungkan menggunakan modul “*Digital Pendulum Controller*



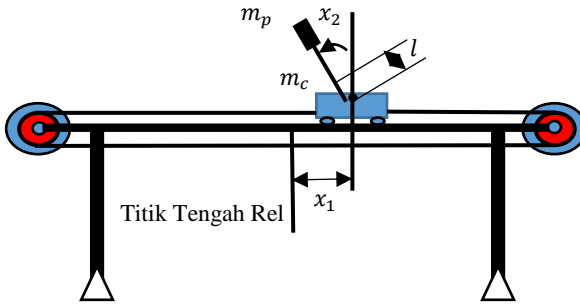
33-201” sebagai *interface*, serta *board* akuisisi data (DAQ) sebagai I/O pada komputer. Sinyal kontrol dari komputer keluar melalui *Digital to Analog Converter* (DAC) yang terdapat pada DAQ. Power Amplifier yang terhubung dengan *port* keluaran DAQ akan menerima sinyal kontrol yang kemudian dikirim ke motor DC untuk menggerakkan kereta. Sensor akan membaca sinyal respon dari motor DC dan kemudian meneruskannya menuju encoder. Sinyal dari encoder akan diteruskan menuju komputer melalui ADC pada *board* DAQ. Sistem Pendulum secara keseluruhan dapat dilihat pada Gambar 2.2.



**Gambar 2. 2** Sistem Pendulum Kereta Secara Keseluruhan [5]

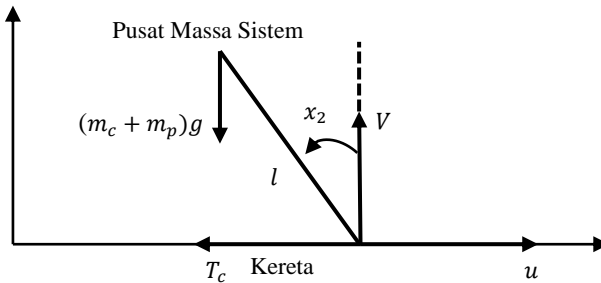
### 2.2.1 Model Fisik Sistem [5]

Sistem Pendulum Kereta terdiri dari dua bagian, yaitu kereta dan pendulum. Kereta dapat bergerak sepanjang sumbu horisontal pada rel kereta dan pendulum yang bersumbu pada sisi kereta bergerak secara rotasi pada bidang vertikal. Diagram fisik sistem Pendulum kereta ditunjukkan pada Gambar 2.3.



**Gambar 2. 3** Diagram Fisik Sistem Pendulum Kereta [5]

Pada Sistem Pendulum Kereta masa kereta dinyatakan dengan  $m_c$  dan massa pendulum dengan  $m_p$ , jarak antara sumbu rotasi ke pusat massa batang pendulum dinyatakan dengan  $l$ . Sinyal kontrol  $u$  bekerja sejajar terhadap lintasan rel kereta. Gaya gesek kereta terhadap rel adalah  $T_c$ , gaya normal yang bekerja pada sistem pendulum kereta dinyatakan dengan  $V$ . Sedangkan momen inersia sistem terhadap pusat massa sistem dinotasikan dengan  $J$ .  $D_p$  merupakan momen gesek akibat gerak putar batang pendulum, proporsional terhadap percepatan sudut pendulum  $D_p = f_p x_4$ . Komponen gaya Sistem Pendulum Kereta ditunjukkan pada Gambar 2.4.



**Gambar 2. 4** Komponen Gaya Sistem Pendulum Kereta [5]

Nilai parameter-parameter yang digunakan dalam sistem pendulum kereta terdapat pada Tabel 2.1.

**Tabel 2.1** Parameter-parameter yang Digunakan Dalam Sistem Pendulum Kereta [5]

Parameter	Simbol	Nilai
Massa kereta [kg]	$m_c$	1,12
Massa beban pendulum [kg]	$m_{pw}$	0,095
Massa batang pendulum [kg]	$m_{ps}$	0,025
Panjang rel [m]	$R_l$	1
Panjang batang pendulum [m]	$l_p$	0,402
Jarak pusat massa batang ke sumbu putar [m]	$l_{po}$	0,146
Panjang beban [m]	$l_c$	0,041
Jarak pusat massa beban ke sumbu putar [m]	$l_{co}$	0,347
Jari-jari beban pendulum [m]	$r_c$	0,02
Jari-jari batang pendulum [m]	$r_p$	0,006
Gaya gesek statis [N]	$F_s$	2,5316
Gaya gesek dinamis ( <i>Coulomb</i> ) [N]	$F_c$	2,2813
Gaya kontrol maksimal [N]	$u_{max}$	17,5
Gaya kontrol minimal [N]	$DZ_u$	1,3792
Kecepatan minimal kereta [m/det]	$DZ_{cv}$	0,008
Kecepatan ayun minimal pendulum [rad/det]	$DZ_{pv}$	0,034
Gaya gesek pendulum [kg.m <sup>2</sup> /det]	$f_p$	0,0001
Momen inersia pendulum [kg.m <sup>2</sup> ]	$J_p$	0,0139
Momen inersia sistem [kg.m <sup>2</sup> ]	$J$	0,0136
Jarak sumbu rotasi ke pusat massa sistem [m]	$l$	0,0168
Kec. kereta awal zona 5 gaya gesek [m/det]	$x_c$	0,3955
Gaya gesek saat kecepatan kereta $x_c$ [N]	$Y_c$	2,3815
Tegangan kontrol maksimal [V]	$V_m$	2,5

### 2.2.2 Model Matematis Sistem Pendulum Kereta [5]

Model matematika Sistem Pendulum Kereta dapat diperoleh dengan mengetahui arah gaya dan parameter-parameter yang bekerja pada sistem. Model matematika Sistem Pendulum Kereta dinyatakan dalam empat vektor *state*, yaitu  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$

$x_1$  = Posisi Kereta (diukur dari titik tengah rel)

$x_2$  = Sudut pendulum terhadap garis vertikal (diukur berlawanan arah jarum jam.

$x_3$  = Kecepatan Kereta

$x_4$  = Kecepatan sudut pendulum

Kecepatan kereta merupakan turunan pertama dari posisi kereta  $x_3 = x_1'$ . Kecepatan sudut merupakan turunan pertama dari sudut  $x_4 = x_2'$ . Berdasarkan Gambar 2. 3 dan Gambar 2. 4, koordinat arah horizontal pada pusat massa adalah  $x_1 - l \sin x_2$  dan arah vertikalnya  $l \cos x_2$ . Sehingga berdasarkan hukum kedua Newton, persamaan gaya Sistem Pendulum Kereta dapat ditulis sebagai berikut:

$$u - T_c = (m_c + m_p)(x_1 - l \sin x_2)'' \quad (2.1)$$

$$V - (m_c + m_p)g = (m_c + m_p)(l \cos x_2)'' \quad (2.2)$$

$$(u - T_c)l \cos x_2 + V l \sin x_2 - D_p = J x_2'' \quad (2.3)$$

Persamaan (2.1) dan Persamaan (2.2) merupakan gerak translasi dari pusat massa sistem. Sedangkan Persamaan (2.3) menyatakan gerak rotasi sistem secara keseluruhan terhadap pusat massa sistem. Sehingga model matematika dalam bentuk persamaan *state* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \dot{x}_4 &= \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

dengan

$$\begin{aligned} a &= l^2 + \frac{J}{m_c + m_p} \\ \mu &= (m_c + m_p)l \end{aligned}$$

### 2.3 Linearisasi [6]

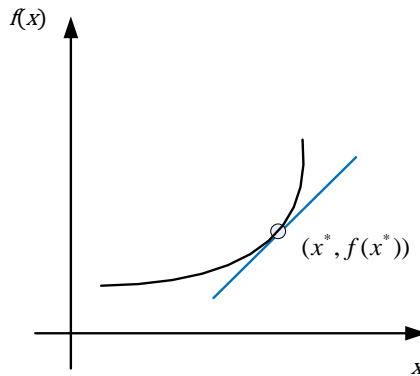
Berdasarkan kelinearitasannya sistem dibagi menjadi dua, yaitu sistem linear dan sistem nonlinear. Sistem dikatakan linear jika sistem tersebut diberikan satu masukan dengan bobot tertentu, sistem tersebut menghasilkan satu keluaran dengan bobot yang sama (superposisi). Sedangkan pada sistem nonlinear, jika sistem tersebut diberikan satu masukan dengan bobot tertentu, sistem tersebut menghasilkan satu keluaran dengan bobot yang tidak tentu.

Teori linearisasi digunakan untuk melinearkan persamaan-persamaan nonlinear pada sistem. Dari hasil linearisasi dihasilkan suatu matriks konstanta yang sama dengan suatu sistem kontrol linear untuk setiap daerah kerja, sehingga mempermudah dalam pengontrolan. Dengan linearisasi diperoleh perilaku lokal dari sistem pada daerah kerja nominal dengan matriks Jacobi.

Sistem nonlinear dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.5)$$

dimana  $y = f(x)$  merupakan kurva seperti pada Gambar 2.5



**Gambar 2. 5** Linearisasi  $y = f(x)$  pada Sekitar  $x^*$  [1]

Pada titik  $x^*$ , garis singgung merepresentasikan pendekatan linear  $f(x)$  di sekitar  $x^*$ . Hasil linearisasi dari Persamaan (2.5) dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$(f(x) - f(x^*)) = f'(x^*) (x - x^*)$$

$$\delta y = f(\delta x) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} \delta x \quad (2.6)$$

dengan:

$$\delta x = x - x^*$$

$$\delta y = f(x) - f(x^*)$$

Titik kerja  $x^*$  pada Persamaan (2.6) merupakan titik pusat dari linearisasi. Jika titik kerja atau titik ekuilibrium sistem berada pada

origin, dan sistem di linearisasi pada titik ekuilibriumnya, maka  $f(x^*) = 0$ . Sehingga Persamaan (2.6) menjadi:

$$f(x) = \dot{x} = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x^*} \quad (2.7)$$

Jika terdapat sistem nonlinear *loop* terbuka dengan state sejumlah n maka linearisasi lokal pada titik ekuilibriumnya  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  menjadi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x_1^*=x_1^* \\ \vdots \\ x_n^*=x_n^*}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

dapat juga dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{x} = Ax \quad (2.9)$$

dengan:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x_1^*=x_1^* \\ \vdots \\ x_n^*=x_n^*}}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Matriks A merupakan matriks Jacobi dari  $f(x)$ . Sistem nonlinear dapat didekati menjadi sistem linear berdasarkan hasil linearisasi lokal di sekitar titik ekuilibriumnya dan dapat direpresentasikan pada persamaan berikut:

$$\dot{x} = f(x) + h(x, u) \quad (2.10)$$

linearisasi lokal sistem dengan jumlah state sebanyak n pada ekuilibrium  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, u^*$  adalah:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.11)$$

dengan

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{array} \right] \Bigg|_{\substack{x_1^* = x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* = x_n^*}}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x, u)}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_n(x, u)}{\partial u} \end{bmatrix}$$

## 2.4. Teori Fuzzy [7]

Logika *fuzzy* adalah logika yang memiliki nilai tidak pasti antara benar dan salah. Sebuah nilai dapat bernilai benar dan salah secara bersamaan karena nilai benar ataupun salah tergantung pada derajat (bobot) keanggotaan yang dimiliki. Kelebihan logika *fuzzy* yaitu kemampuan dalam proses penalaran secara bahasa.

### 2.4.1 Himpunan Fuzzy [7]

Himpunan *fuzzy* merupakan rentang nilai antara benar dan salah untuk setiap anggotanya. Nilai derajat keanggotaan adalah nilai yang menentukan posisi suatu nilai dalam himpunan. Misalkan  $A$  adalah suatu semesta himpunan dan  $\alpha$  adalah elemen dari  $A$  ( $\alpha \in A$ ). Selain itu elemen dari himpunan jarak ( $J$ ) merupakan bagian dari himpunan  $A$  ( $J \subseteq A$ ). Sehingga  $\alpha$  dapat termasuk kedalam anggota himpunan  $J$  atau tidak. Sehingga menurut teori himpunan Boolean dapat didefinisikan fungsi karakteristik setiap elemen  $\alpha$  dalam  $A$ .

$$\mu_J(\alpha) = \begin{cases} 1; & \alpha \in A \\ 0; & \alpha \notin A \end{cases} \quad (2.12)$$

Pada himpunan fuzzy, semua elemen dari semesta himpunan disebutkan dan diberikan bobot antara 0 dan 1. Secara matematis himpunan fuzzy  $J$  dalam  $A$  dinyatakan sebagai berikut.

$$J = \left\{ \left( \alpha, \mu_J(\alpha) \right) : \alpha \in A \right\} \quad (2.13)$$

dengan  $\mu_J(\alpha)$  adalah fungsi keanggotaan (*membership function*) untuk himpunan fuzzy  $J$ . Nilai dari fungsi keanggotaan ini menentukan derajat keanggotaan elemen dalam himpunan fuzzy.

### 2.4.2 Fungsi Keanggotaan Fuzzy [7]

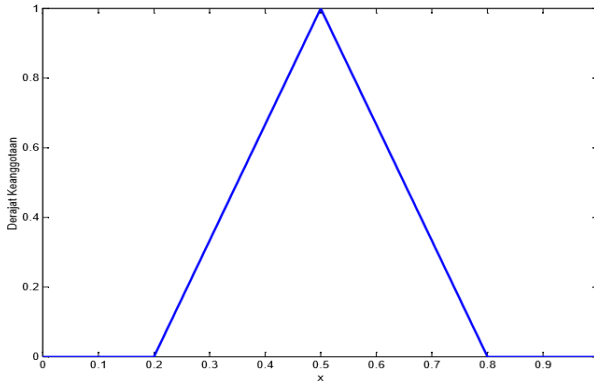
Fungsi keanggotaan *fuzzy* menyatakan derajat keanggotaan suatu nilai antara 0 sampai 1. Fungsi keanggotaan *fuzzy* memiliki beberapa

bentuk, antara lain fungsi segitiga trapesium, Gaussian, *Generalized Bell*, dan bentuk lainnya.

1. Fungsi Keanggotaan Segitiga

Fungsi Keanggotaan segitiga ditentukan oleh tiga parameter  $\{a, b, c\}$  dengan  $a < b < c$  seperti yang di tunjukkan pada Persamaan (2.14)

$$\mu(x) = f(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x > c \end{cases} \quad (2.14)$$



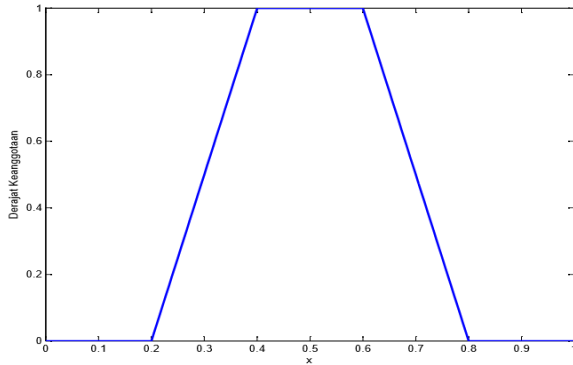
**Gambar 2. 6** Fungsi Keanggotaan Segitiga

2. Fungsi Keanggotaan Trapesium

Berbeda dengan fungsi keanggotaan segitiga yang ditentukan oleh tiga parameter, fungsi keanggotaan trapesium ditentukan oleh 4 parameter yaitu  $\{a, b, c, d\}$  dengan  $a < b < c < d$  seperti yang ditunjukkan pada Persamaan (2.15)

$$\mu(x) = f(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{c-x}{c-b}, & c \leq x \leq d \\ 0, & x > d \end{cases} \quad (2.15)$$



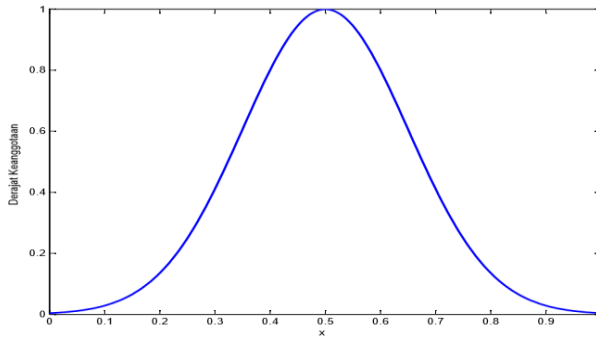


**Gambar 2. 7** Fungsi Keanggotaan Trapesium

3. Fungsi Keanggotaan *Gaussian*

Fungsi Keanggotaan *Gaussian* bergantung pada dua parameter yaitu  $\{\sigma, c\}$ . Parameter  $\sigma$  (standar deviasi) mendefinisikan lebar fungsi keanggotaan dan  $c$  menentukan pusat fungsi keanggotaan. Derajat keanggotaannya ditentukan sebagai berikut:

$$\mu(x) = f(x; a, b, c, d) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2} \quad (2.16)$$

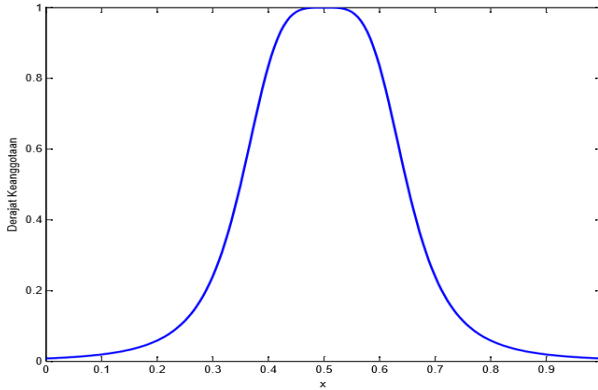


**Gambar 2. 8** Fungsi Keanggotaan *Gaussian*

4. Fungsi Keanggotaan *Generalized Bell*

Fungsi Keanggotaan *Generalized Bell* dibentuk oleh 3 parameter yaitu  $\{a, b, c\}$ . Parameter  $c$  merupakan pusat dari fungsi keanggotaan menentukan letak koordinat  $x$  yang memiliki derajat keanggotaan 1. Derajat keanggotaan ditentukan sebagai berikut:

$$\mu(x) = f(x; a, b, c, d) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}} \quad (2.17)$$



**Gambar 2. 9** Fungsi keanggotaan *Generalized Bell*

### 2.4.3 Operasi Himpunan Fuzzy [7]

Operasi himpunan *fuzzy* dilakukan untuk mengoperasikan fungsi keanggotaan yang satu dengan yang lain. Terdapat beberapa operator *fuzzy* yaitu operasi interseksi (*AND*), *Union* (*OR*), komplement (*NOT*), dan operasi lainnya. Misalkan terdapat dua himpunan *fuzzy*, yaitu A dan B dengan fungsi keanggotaan  $\mu_A$  dan  $\mu_B$  maka operasi himpunan *fuzzy* didefinisikan sebagai berikut:

#### 1. Interseksi (*AND*)

Interseksi himpunan *fuzzy* A dan B adalah himpunan yang fungsi keanggotaannya diberikan operasi *minimum* dan *Algebraic Product*. Jika menggunakan operator *minimum* maka hasil operasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in X \quad (2.18)$$

Jika menggunakan operasi *Algebraic Product* hasil operasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \mu_B(x), x \in X \quad (2.19)$$

#### 2. *Union* (*OR*)

*Union* dari himpunan *fuzzy* A dan B adalah gabungan dari kedua himpunan *fuzzy* tersebut. Jika operator yang digunakan adalah operator *maximum*, maka fungsi keanggotaannya sebagai berikut

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, x \in X \quad (2.20)$$

Namun jika yang digunakan adalah operator *Algebraic Sum*, maka fungsi keanggotaannya adalah:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x), x \in X \quad (2.21)$$

3. Komplemen (*NOT*)

Komplemen dari sebuah himpunan *fuzzy* adalah hasil dari 1 dikurangi dengan fungsi keanggotaan dari himpunan *fuzzy* tersebut.

$$\mu'_A = 1 - \mu_A(x), x \in X \quad (2.22)$$

#### 2.4.4 Sistem Inferensi Fuzzy [7]

Inferensi *fuzzy* menjelaskan mengenai aturan *fuzzy* yang memiliki kemiripan dengan logika manusia yaitu logika penalaran. Aturan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

*If Premise Then Consequent* atau

*If x is A Then y is B*

Dengan  $x$  dan  $y$  adalah variabel *fuzzy*.  $A$  dan  $B$  adalah fungsi keanggotaan *fuzzy*.

Mekanisme Inferensi *fuzzy* merupakan proses pengambilan keputusan dari masing-masing premis sesuai dengan aturan *fuzzy*. Terdapat empat komponen dalam kontroler *fuzzy* yaitu:

1. Basis Aturan

Basis aturan merupakan kumpulan dari aturan *fuzzy* (*If-Then*) yang berisi pemetaan *input* tegas ke *output* dalam system *fuzzy* sesuai dengan variabel yang telah ditentukan untuk mencapai hasil kontrol yang baik.

2. Mekanisme Inferensi

Berisi prosedur untuk melakukan inferensi sesuai dengan basis aturan agar diperoleh cara pengontrolan *plant* yang baik.

3. Fuzzifikasi

Menentukan derajat keanggotaan dari setiap variabel *input* tegas dengan cara mengubah *input* tegas menjadi informasi yang mempermudah mekanisme inferensi *fuzzy*.

4. Defuzzifikasi

Merubah hasil inferensi *fuzzy* menjadi *output* tegas

#### 2.5 Model Fuzzy Takagi-Sugeno [8]

Model *Fuzzy* T-S dapat merepresetasikan model nonlinear yang merupakan kombinasi dari gabungan beberapa model sistem linear pada daerah kerja tertentu yang dinyatakan dengan aturan *If-Then*. Model

system secara keseluruhan diperoleh dengan pencampuran *fuzzy* dari beberapa model linear yang telah diperoleh dari hasil linearisasi.

Aturan *plant* model *fuzzy* T-S dapat ditulis sebagai berikut:

Aturan model *plant* ke-*i*

**If**  $z_1(t)$  is  $M_{i1}$  AND  $z_j(t)$  is  $M_{ij}$

**Then**  $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$

$$i = 1, 2, \dots, r \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2.23)$$

dengan  $r$  adalah jumlah aturan *fuzzy*,  $p$  adalah jumlah himpunan *fuzzy* dalam satu aturan, dan  $M_{ij}$  adalah himpunan *fuzzy*,  $x(t) \in R^n$  merupakan vektor *state*,  $u(t) \in R^m$  merupakan vektor control masukan,  $A_i$  dan  $B_i$  adalah matrik *state* dan matrik *input*, sedangkan  $z(t) \in R^j$  merupakan variabel premis.

Jika menggunakan mode defuzzifikasi rerata berbobot maka bentuk model *fuzzy* T-S adalah sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r a_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (2.24)$$

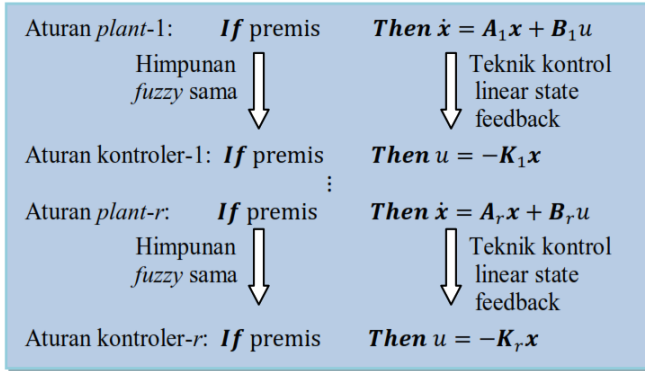
dengan

$$a_i(z(t)) = \frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))} \quad \text{dan} \quad \mu_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z(t))$$

Berikut adalah sifat dari pembobot  $a_i(z(t))$  dan derajat keanggotaan  $\mu_i(z(t))$  :

$$\begin{aligned} a_i(z(t)) &\geq 0 ; \quad \sum_{i=1}^r a_i(z(t)) = 1 \\ \mu_i(z(t)) &\geq 0 ; \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) > 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Kontroler *State Feedback* pada sistem ini dapat disusun menggunakan konsep *Parallel Distributed Compensation* (PDC). Pada konsep PDC setiap aturan kontroler dirancang berdasarkan aturan *plant* linear yang bersesuaian dengan himpunan *fuzzy* yang sama. Berikut adalah konsep PDC:



**Gambar 2. 10** Konsep Parallel Distributed Compensation (PDC) [9]

Berdasarkan konsep PDC diatas untuk aturan *plant* pada Persamaan (2.23) dapat disusun aturan kontroler *fuzzy* dengan konsep PDC sebagai berikut:

Aturan kontroler ke-*i*.

**If**  $z_1(t)$  is  $M_{i1}$  AND ... AND  $z_j(t)$  is  $M_{ij}$

**Then**  $u(t) = -K_i x(t)$

$$i = 1, 2, \dots, r \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2.26)$$

maka keluaran dari kontroler *fuzzy* secara keseluruhan adalah:

$$u(t) = - \sum_{j=1}^r a_j(z(t)) [K_i x(t)] \quad (2.27)$$

Untuk mendapatkan sistem *loop* tertutup dapat dengan mensubstitusikan Persamaan (2.27) ke Persamaan (2.24), sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_i(z(t)) a_j(z(t)) [(A_i - B_i K_j) x(t)] \quad (2.28)$$

Berdasarkan sifat pembobot pada Persamaan (2.25) maka Persamaan (2.28) di atas dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = (A_i - B_i K_j) x(t), i = 1, 2, \dots, r \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2.29)$$

## 2.6 Sistem Kontrol Tracking [6]

Kontrol *tracking fuzzy* dirancang untuk mengontrol posisi kereta agar dapat mengikuti sinyal referensi dan mempertahankan batang pendulum tetap pada titik ekuilibriumnya.

### 2.6.1 Servo Tipe 1 [6]

Untuk menjaga batanng pendulum tetap pada titik ekuilibriumnya dan mengontrol posisi dari kereta pada Sistem Pendulum Kereta maka digunakan sistem *servo* tipe 1. Pada sistem *servo* tipe 1 posisi kereta kembali ke *input* dan menambahkan integrator pada *feedforward* seperti pada Gambar 2.10. Berdasarkan Gambar 2. 11 dapat diperoleh:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ \dot{\xi} &= r - y = r - Cx\end{aligned}\tag{2.30}$$

maka dapat dibuat *augmented system*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)\tag{2.31}$$

dimana

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}; \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

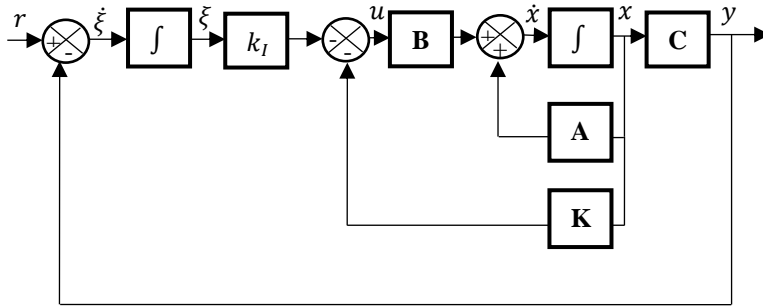
dan sinyal kontrol

$$u = -\bar{K}\bar{x}$$

dimana

$$\bar{K} = -[K \quad k_I]\tag{2.32}$$

dengan  $K$  adalah *gain feedback* dan  $k_I$  adalah *gain integrator*.  $K$  dan  $k_I$  dapat dihitung menggunakan pendekatan *Linear Matrix Inequality* yang akan dijelaskan pada Subbab 2.6.3



**Gambar 2. 11** Sistem Kontrol *Tracking Model Servo Tipe 1* [6]

### 2.6.2 Analisa Kestabilan Lyapunov [6]

Persamaan lyapunov dapat digunakan untuk menguji kestabilan sistem baik sistem linear maupun sistem nonlinear. Kestabilan sistem dapat dilihat dengan semakin berkurangnya energi yang tersimpan dan mencapai nilai minimal ketika sistem telah mencapai titik ekuilibriumnya. Fungsi Lyapunov yang disimbolkan dengan  $V(x)$  tergantung pada vektor *state* sistem yaitu  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ .

Metode kedua lyapunov berbeda dengan metode pertama yang mengharuskan adanya penyelesaian persamaan differensialnya untuk menentukan kestabilan. Untuk metode kedua lyapunov disebut sebagai metode langsung atau *direct method*, dimana untuk menentukan kestabilannya tidak harus mendapatkan penyelesaian persamaan differensial sistem melainkan hanya terdiri dari tahap menemukan fungsi lyapunov dan melakukan pengujian.

Dalam teori stabilitas lyapunov sistem dengan dinamika  $\dot{x} = f(x)$  dapat dikatakan stabil asimtotik jika terdapat satu fungsi  $V(x)$ , yang disebut kandidat fungsi lyapunov, yang memenuhi sifat-sifat berikut:

- $V(x) > 0$ ,
- $\dot{V}(x) < 0$ ,
- dan hanya bernilai nol untuk  $x = 0$

Menurut syarat kestabilan lyapunov diatas menunjukkan bahwa fungsi  $V(x) > 0$  memiliki laju perubahan  $\dot{V}(x)$  yang negatif. Ketika  $t$  mendekati tak hingga laju perubahan yang negatif menyebabkan fungsi  $V(x)$  mengecil hingga bernilai 0. Fungsi  $V(x)$  yang bernilai 0 menyatakan bahwa vektor *state* sistem bernilai 0, sehingga *state* sistem bergerak menuju titik origin yaitu titik ekuilibriumnya.

Analisa kestabilan Lyapunov dapat diterapkan pada sistem *loop* terbuka maupun sistem *loop* tertutup. Misalkan terdapat sistem *loop* terbuka seperti berikut:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.33)$$

Dimana  $x$  adalah vektor state (vektor-n) dan  $A$  adalah matriks konstan  $n \times n$ . Dengan kandidat fungsi Lyapunov sebagai berikut:

$$V(x(t)) = x(t)^T Px(t) \quad (2.34)$$

Dimana  $P$  adalah matriks simetris bernilai positif agar sistem stabil. Untuk memenuhi syarat kestabilan Lyapunov dapat dihitung turunan dari  $V(x(t))$  sebagai berikut:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} \quad (2.35)$$

Dengan substitusi Persamaan (2.33) ke Persamaan (2.35), didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= [Ax(t)]^T Px(t) + x(t)^T P[Ax(t)] \\ \dot{V}(x) &= x(t)^T A^T Px(t) + x(t)^T PAx(t) \\ \dot{V}(x) &= x(t)^T [A^T P + PA]x(t) \\ \dot{V}(x) &= x(t)^T Qx(t)\end{aligned}\tag{2.36}$$

dengan

$$Q = -[A^T P + PA]\tag{2.37}$$

Untuk memenuhi syarat kestabilan Lyapunov,  $\dot{V}(x)$  definit negatif, sehingga matrik  $Q$  definit positif. Sehingga matriks simetris  $P$  harus memenuhi syarat berikut:

1.  $P > 0$
2.  $A^T P + PA < 0$

Untuk sistem *loop* tertutup sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = (A_i - B_i K_i)x(t)\tag{2.38}$$

Untuk memenuhi syarat  $V(x)$  definit positif dan  $\dot{V}(x)$  definit negatif dapat dihitung dengan Persamaan (2.34) dan didapat Persamaan (2.35). Dengan Substitusi Persamaan (2.38) ke Persamaan (2.35) diperoleh:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= [(A_i - B_i K_i)x(t)]^T Px(t) + x(t)^T P[(A_i - B_i K_i)x(t)] \\ \dot{V}(x) &= x^T (A_i - B_i K_i)^T Px + x^T P(A_i - B_i K_i)x \\ \dot{V}(x) &= x(t)^T [(A_i - B_i K_i)^T P + P(A_i - B_i K_i)]x(t) \\ \dot{V}(x) &= -x(t)^T Qx(t)\end{aligned}\tag{2.39}$$

dengan

$$\begin{aligned}Q &= -[(A_i - B_i K_i)^T P + P(A_i - B_i K_i)] \text{ atau} \\ Q &= -[A_i^T P + PA_i - K_i^T B_i^T P - PB_i K_i]\end{aligned}\tag{2.40}$$

Untuk memenuhi syarat kestabilan Lyapunov,  $\dot{V}(x)$  definit negatif, sehingga matrik  $Q$  harus definit positif. Sehingga matriks simetris  $P$  harus memenuhi syarat berikut:

1.  $P > 0$
2.  $A_i^T P + PA_i - K_i^T B_i^T P - PB_i K_i < 0$

### 2.6.3 Linear Matrix Inequalities (LMI) [10]

Sistem dapat dikatakan stabil jika terdapat matriks  $P$  yang memenuhi persyaratan sebagai berikut:

1.  $P > 0$
2.  $A^T P + PA < 0$



Sistem orde tinggi matriks  $P$  tidak mudah diperoleh dengan menggunakan perhitungan analitik. Oleh karena itu diperlukan perhitungan numerik menggunakan metode optimisasi konveks yang disebut *Linear Matriks Inequalities* (LMI).

Berikut ini adalah bentuk umum dari LMI.

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (2.41)$$

Dalam LMI dikenal istilah *Schur Complement*. Persamaan *Schur Complement* mengubah bentuk pertidaksamaan matriks menjadi bentuk LMI yaitu:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} < 0 \quad (2.42)$$

dengan  $Q(x) = Q(x)^T$  dan  $R(x) = R(x)^T$  adalah ekivalen dan dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} R(x) &> 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T &> 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Jika terdapat beberapa LMI,  $F^{(1)}(x) > 0, \dots, F^{(p)}(x) > 0$ , maka LMI tersebut dapat nyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= \text{diag} \left( F^{(1)}(x) \dots \dots F^{(p)}(x) \right) > 0 \text{ atau} \\ \bar{F}(x) &= \begin{bmatrix} F^{(1)}(x) & 0 \\ 0 & F^{(p)}(x) \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Karena beberapa LMI dapat disederhanakan menjadi Persamaan (2.44) maka penyelesaian optimasi untuk beberapa LMI dapat disederhanakan menjadi optimasi LMI  $F(x) < 0$ . Jika persamaan kestabilan Lyapunov dibawa kedalam bentuk LMI maka dapat dinyatakan dalam persamaan:

$$\begin{cases} F^{(1)}(x) = P > 0 \\ F^{(2)}(x) = -A^T P - P A > 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Sehingga Pertidaksamaan (2.44) dapat menyederhanakan Persamaan (2.45) sebagai berikut:

$$\bar{F}(x) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -A^T P - P A \end{bmatrix} > 0 \quad (2.46)$$

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## BAB 3

### PERANCANGAN SISTEM

Pada bab ini membahas tentang perancangan sistem kontrol yang digunakan pada tugas akhir ini. Pada bagian pertama membahas tentang linearisasi model matematika sistem pendulum kereta pada tiga titik kerja. Hasil linearisasi tersebut digunakan untuk merepresentasikan model matematis sistem pendulum kereta yang kemudian digunakan untuk merancang sistem kontrol. *Gain* kontrol dirumuskan dari pertidaksamaan Lyapunov kemudian diubah kedalam bentuk LMI.

#### 3.1 Linearisasi

Sistem pendulum kereta merupakan plant nonlinear, sehingga untuk mengontrolnya perlu dilakukan proses linearisasi. Proses linearisasi dilakukan berdasarkan beberapa daerah kerja, yaitu besar sudut kemiringan pendulum. Pada tugas akhir ini linearisasi dilakukan pada tiga daerah kerja, yaitu  $\pm 0$  radian,  $\pm 0,3$  radian,  $\pm 0,5$  radian.

Persamaan (2.4) merupakan persamaan nonlinear. Persamaan (2.4) diubah kedalam bentuk persamaan *state* berdasarkan hasil linearisasi lokal di sekitar titik ekuilibriumnya agar dapat memenuhi persamaan *state* untuk sistem nonlinear seperti pada Persamaan (2.10) dengan:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \sin^2 x_2} \\ \frac{l \cos x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$h(x, u) = \begin{bmatrix} h_1(x, u) \\ h_2(x, u) \\ h_3(x, u) \\ h_4(x, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{au}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\ \frac{ul \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Dari Persamaan (2.11) didapatkan model linear sistem pendulum kereta dengan cara menurunkan secara parsial  $f$  terhadap  $x$  dan  $h$  terhadap  $u$  dengan

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(\mathbf{x})}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x})}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(\mathbf{x})}{\partial x_4} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial u} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial u} \\ \frac{\partial h_3(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial u} \\ \frac{\partial h_4(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^* \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}^*}}$$

Elemen-elemen matriks  $A$  dan  $B$  dapat dilihat pada Lampiran (A.2). Linearisasi lokal hanya dilakukan pada  $x_2$  yaitu  $x_2 = 0$  radian,  $x_2 = \pm 0,3$  radian atau  $= \pm 17,18$  derajat dan  $x_2 = \pm 0,5$  radian atau  $= \pm 28,64$  derajat.

Untuk titik kerja pertama :

$x_2 = 0$ ,  $x = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  dan  $u = 0$  diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{u}$$

dengan

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2541 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 15,1225 & 0 & -0,0074 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8274 \\ 1,2444 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Untuk titik kerja kedua :

$x_2 = \pm 0,3$ ,  $x = [0 \ \pm 0,3 \ 0 \ 0]^T$  dan  $u = 0$  diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}$$

dengan

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,2082 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 14,3493 & 0 & -0,0074 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8255 \\ 1,1862 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Untuk titik kerja ketiga :

$x_2 = \pm 0,5$ ,  $x = [0 \ \pm 0,5 \ 0 \ 0]^T$  dan  $u = 0$  diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_3 \mathbf{x} + \mathbf{B}_3 \mathbf{u}$$

dengan

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,1342 & 0 & -0,0001 \\ 0 & 13,0363 & 0 & -0,0074 \end{bmatrix}; B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8225 \\ 1,0856 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

### 3.2 Kontrol Tracking Fuzzy

Pada Subbab 3.1 telah diperoleh hasil linearisasi lokal sistem pendulum kereta, sehingga dapat di bangun model *fuzzy* T-S dengan bentuk aturan pada Persamaan (2.23). Sistem pendulum kereta dilinearisasi pada tiga titik kerja, sehingga model *fuzzy* T-S memiliki tiga aturan dan satu variable premis, yaitu sudut pendulum. Berikut adalah *rule* model aturan *fuzzy* T-S untuk *plant* sistem pendulum kereta:

#### Aturan *plant* ke-1:

*if*  $x_2(t)$  is  $M_1$  (Sekitar 0 rad)

$$\text{Then } \dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t) \quad (3.6)$$

#### Aturan *plant* ke-2:

*if*  $x_2(t)$  is  $M_2$  ( $\pm 0,3$  rad)

$$\text{Then } \dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t) \quad (3.7)$$

#### Aturan *plant* ke-3:

*if*  $x_2(t)$  is  $M_3$  ( $\pm 0,5$  rad)

$$\text{Then } \dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t) \quad (3.8)$$

Pada tugas akhir ini menggunakan matriks perluasan (*augmented system*). Berdasarkan Gambar 2.11 dapat diperoleh matriks perluasan seperti Persamaan (2.31) dan Persamaan (2.32) maka dapat dibentuk tiga subsistem *close loop* untuk ketiga model linear sistem pendulum kereta sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}_1x - \bar{B}_1u \\ \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ -C_1 & 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} [K_1 \quad k_{I1}] \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}_2x - \bar{B}_2u \\ \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ -C_2 & 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} [K_2 \quad k_{I2}] \end{aligned} \quad (3.10)$$

dan

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}_3x - \bar{B}_3u \\ \begin{bmatrix} A_3 & 0 \\ -C_3 & 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} B_3 \\ 0 \end{bmatrix} [K_3 \quad k_{I3}] \end{aligned} \quad (3.11)$$

dimana

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,2541 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 15,1225 & 0 & -0,0074 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8274 \\ 1,2444 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,2082 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 14,3493 & 0 & -0,0074 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8255 \\ 1,1862 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

dan

$$\bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,1342 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 13,0363 & 0 & -0,0074 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \bar{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8255 \\ 1,0856 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Pada Tugas Akhir ini matriks K dihitung menggunakan pemrograman MATLAB dengan algoritma LMI (Lampiran B.3). Nilai *gain* yang dihasilkan menggunakan algoritma LMI dapat dipilah karena sistem mengalami perluasan. Berdasarkan aturan *plant* linear yang bersesuaian dengan himpunan *fuzzy* yang sama pada konsep PDC maka dapat dirancang aturan kontroler pada persamaan berikut:

**Aturan kontroler ke-1:**

**if**  $x_2(t)$  is  $M_1$  (Sekitar 0 radian)

$$\textbf{Then } \mathbf{u}(t) = -[K_1 \quad k_{I1}] \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

**Aturan kontroler ke-2:**

**if**  $x_2(t)$  is  $M_2$  ( $\pm 0,3$  radian)

$$\textbf{Then } \mathbf{u}(t) = -[K_2 \quad k_{I2}] \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

**Aturan kontroler ke-3:**

**if**  $x_2(t)$  is  $M_3$  ( $\pm 0,5$  radian)

$$\textbf{Then } \mathbf{u}(t) = -[K_3 \quad k_{I3}] \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Pada tugas akhir ini menggunakan inferensi fuzzy dengan penghubung *AND* dan metode defuzifikasi yang digunakan adalah rerata berbobot. Bentuk model *fuzzy* secara keseluruhan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^3 a_i(x_2(t)) [\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i u(t)] \\ \mathbf{y}(t) &= \sum_{i=1}^3 a_i(x_2(t)) [C_i x(t)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Keluaran dari kontroler *fuzzy* dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^3 a_i(x_2(t)) [-K_i x(t)] \quad (3.19)$$

dengan

$$a_i(x_2(t)) = \frac{\mu_i(x_2(t))}{\sum_i^r \mu_i(x_2(t))} \quad \text{dan} \quad \mu_i(x_2(t)) = M_i(x_2(t))$$

Substitusi Persamaan (3.19) ke Persamaan (3.18), sehingga menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i(x_2(t)) a_j(x_2(t)) [(\bar{A}_i - \bar{B}_i K_j) x(t)] \\ \mathbf{y}(t) &= \sum_{i=1}^3 a_i(x_2(t)) [C_i x(t)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

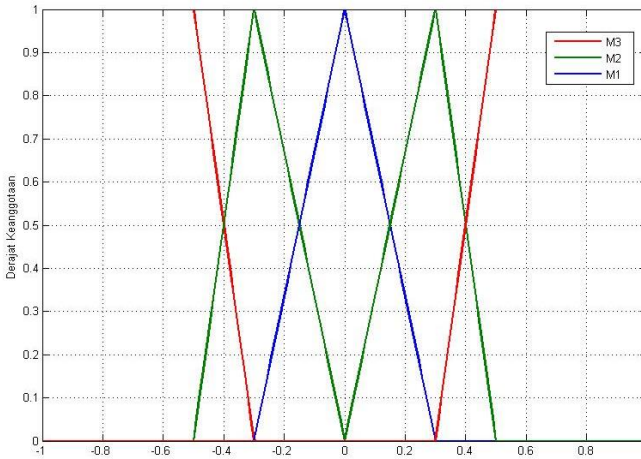
Sinyal kontrol yang dihasilkan dari model *fuzzy* T-S dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u(t) &= M_1(x_2(t)) [-K_1 x(t)] + M_2(x_2(t)) [-K_2 x(t)] + \\ &\quad M_3(x_2(t)) [-K_3 x(t)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

atau dapat ditulis sebagai berikut

$$u(t) = \sum_{i=1}^3 M_i(x_2(t))[-K_i x(t)] \quad (3.22)$$

Fungsi keanggotaan  $M_1$  dan  $M_2$  menggunakan fungsi keanggotaan segitiga dan  $M_3$  menggunakan fungsi keanggotaan trapezium. Parameter fungsi keanggotaan segitiga  $\{a;b;c\} = \{-0,3;0;0,3\}$  dan  $\{0;0,3;0,5\}$ , sedangkan untuk fungsi keanggotaan trapezium  $\{a;b;c;d\}=\{0,3;0,5;1;1,2\}$



**Gambar 3. 1** Fungsi Keanggotaan  $M_1, M_2$  dan  $M_3$

### 3.3 Analisa Kestabilan Lyapunov

Metode Lyapunov digunakan untuk menganalisa kestabilan sistem *loop* tertutup. Pada Persamaan (2.29) merupakan keluaran akhir model fuzzy T-S, yaitu

$$\bar{x}(t) = (\bar{A}_i - \bar{B}_i K_j) x(t), i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, p \quad (3.23)$$

Jika dipilih kandidat fungsi Lyapunov pada Persamaan (2.34), yaitu

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) \quad (3.24)$$

dengan  $P$  adalah matriks simetris, maka turunan dari Persamaan (3.24) adalah

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \quad (3.25)$$



Substitusi Persamaan (3.23) ke Persamaan (3.25), diperoleh

$$\dot{V}(x) = [(\bar{A}_i - \bar{B}_i K_j)x(t)]^T P x(t) + x(t)^T P [(\bar{A}_i - \bar{B}_i K_j)x(t)] \quad (3.26)$$

Setelah diperoleh kandidat fungsi Lyapunov, nilai *gain state feedback* diperoleh dengan menggunakan algoritma LMI. Sistem dikatakan stabil jika matriks  $P$  definit positif dan turunan waktu kandidat fungsi Lyapunov adalah definit negatif.

### 3.4 Linear Matrix Inequalities (LMI)

Untuk mendapatkan nilai *gain feedback* dan *gain integrator* digunakan algoritma LMI. Jika matrik  $P$  definit positif maka sistem *loop* tertutup bersifat stabil asimtotik.

$$[(\bar{A}_i - \bar{B}_i K_j)^T P + P(\bar{A}_i - \bar{B}_i K_j)] < 0, i = 1, 2, \dots, r \quad (3.27)$$

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} < 0, i < j \leq r \quad (3.28)$$

dengan

$$G_{ij} = \frac{\bar{A}_i - \bar{B}_i K_j + \bar{A}_j - \bar{B}_j K_i}{2}$$

*pre multiplying* dan *post multiplying* kedua sisi pertidaksamaan dengan  $P^{-1}$  dan dengan menggunakan variabel peubah:

$$P^{-1} = Q$$

$$K_i Q = Y$$

sehingga Persamaan (3.27) dan (3.28) menjadi

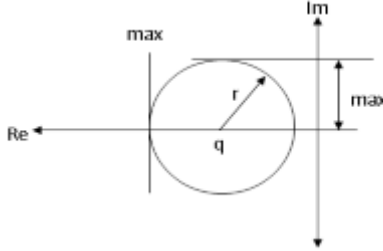
$$\bar{A}_i Q + Q \bar{A}_i^{-1} - \bar{B}_i Y_i - Y_i^T \bar{B}_i^T < 0, i = 1, 2, \dots, r \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [(\bar{A}_i Q + Q \bar{A}_i^{-1} - \bar{B}_i Y_i - Y_i^T \bar{B}_i^T) \\ & + \frac{1}{2} [(\bar{A}_i Q + Q \bar{A}_i^{-1} - \bar{B}_i Y_i - Y_i^T \bar{B}_i^T)] < 0, i < j \leq r \end{aligned} \quad (3.30)$$

Untuk penjabaran dari pertidaksamaan diatas terdapat pada Lampiran A.3. Jika LMI diatas menghasilkan solusi matrik  $P$  yang bernilai definit positif, maka kestabilan dari sistem ini terjamin. Tetapi untuk mendapatkan hasil yang lebih baik, pada penelitian ini digunakan batasan berupa penempatan *pole*. Menurut Chilali dan Gahinet [11], daerah LMI diilustrasikan pada Persamaan 3.31, yaitu

$$D_{q,r} = \{x + jy \in C: (x + q)^2 + y^2 < r^2\} \quad (3.31)$$

Persamaan (3.21), jika diilustrasikan kedalam gambar akan membentuk lingkaran dengan titik pusat lingkaran  $(-q, 0)$  dan jari-jari lingkaran  $r$  (dengan  $r > 0$ ). Lingkaran tersebut berada sebelah kiri sumbu imajiner seperti pada Gambar 3.8.



**Gambar 3. 2** Lokasi *Pole* dari Lingkaran Daerah D

Jika  $\lambda = -\zeta\omega_n + j\omega_d$  diasumsikan merupakan *pole* kompleks pada  $D_{q,r}$ , maka harus memenuhi kriteria berikut ini

$$\begin{aligned}\zeta &> \sqrt{1 - (r^2/q^2)} \\ \omega_n &< q + r \\ \omega_d &< r\end{aligned}$$

Sistem kontrol *fuzzy* akan stabil pada daerah D (dengan semua *pole* kompleks berada pada daerah D) jika dan hanya jika memenuhi persamaan berikut ini.

$$\begin{bmatrix} -r\mathbf{Q} & q\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\bar{\mathbf{A}}_i^T + \mathbf{Y}_i^T\bar{\mathbf{B}}_i^T \\ q\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\bar{\mathbf{A}}_i^T + \mathbf{B}_i\mathbf{Y}_i & -r\mathbf{Q} \end{bmatrix} < 0, i < j \leq r \quad (3.32)$$

### 3.5 Perancangan Simulasi

Pengujian sistem kontrol hasil desain disimulasikan dengan menggunakan *software* MATLAB/Simulink. *Plant* nyata Sistem Pendulum Kereta direpresentasikan dengan model matematika *nonlinear* Sistem Pendulum Kereta dalam blok SPK. Blok SPK memiliki satu masukan  $u(t)$  dan empat keluaran  $x(t)$ .



*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## **BAB 4**

### **HASIL DAN ANALISA**

Pada bab ini membahas tentang hasil simulasi sistem kontrol pada sistem pendulum kereta. Simulasi dilakukan dengan menggunakan perangkat lunak *Simulink* MATLAB R2013a. Analisa kestabilan diperoleh menggunakan metode Lyapunov dan *gain* kontroler diperoleh dengan menggunakan pendekatan LMI dengan batasan penempatan *pole*.

#### **4.1 Hasil Simulasi**

Setelah proses perancangan sistem dan kontroler, selanjutnya dilakukan simulasi sistem kontrol menggunakan perangkat lunak *Simulink* MATLAB R2013a. Kontrol *tracking* dikatakan baik apabila respon posisi kereta dapat mengikuti sinyal referensi dan dapat mempertahankan sudut pendulum pada posisi 0 radian. Untuk dapat mencapai posisi 0 radian membutuhkan waktu tertentu (*settling time*). Semakin cepat respon mencapai posisi 0 radian maka respon sudut pendulum dikatakan baik. Sinyal kontrol berpengaruh terhadap hasil respon posisi kereta dan sudut pendulum. Nilai maksimal sinyal kontrol tidak melebihi 200N

##### **4.1.1 Simulasi Menggunakan Sinyal Step**

Simulasi pertama dilakukan dengan menggunakan sinyal referensi berupa sinyal step. Sinyal step yang digunakan dapat ditemukan pada *library source* yang ada pada *Simulink*.

##### **4.1.1.1 Simulasi dengan Berbagai Variasi Penempatan Pole**

Pada subbab ini dibahas hasil dari variasi penempatan *pole*. Simulasi dilakukan dengan kondisi awal sudut pendulum adalah 0,3 radian. Kondisi awal untuk posisi kereta, kecepatan kereta dan kecepatan sudut pendulum adalah 0.

Kondisi penempatan daerah *pole* pertama yang diinginkan adalah  $r = 32$  dan  $q = 70$ . Pada kondisi ini diperoleh nilai matriks  $P$  dan  $K$  adalah sebagai berikut:

$$P = 1 \times 10^{11} \begin{bmatrix} 3,27 & -3,8 & 1,4 & -1,05 & -1,24 \\ -3,8 & 4,8 & -1,8 & 1,38 & 1,45 \\ 1,4 & -1,83 & 0,73 & -0,55 & -67 \\ -1,04 & 1,38 & -0,55 & 0,42 & 0,5 \\ -1,24 & 1,45 & -0,68 & 0,5 & 2,99 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

dan

$$\begin{aligned} K_1 &= [-1500 \quad 2260,5 \quad -892,8 \quad 691,6 \quad 637,9] \\ K_2 &= [-2104,3 \quad 3284,9 \quad -1299,3 \quad 1013,5 \quad 862,4] \\ K_3 &= [-1338,3 \quad 2693,7 \quad -1068,3 \quad 863,7 \quad 343] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nilai *gain* yang diperoleh dapat dipilah, karena sistem mengalami perluasan (*augmented system*), sehingga diperoleh nilai *gain integrator* dan *gain kontrol* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} K_{K1} &= [-1500 \quad 2260,5 \quad -892,8 \quad 691,6] \\ K_{K2} &= [-2104,3 \quad 3284,9 \quad -1299,3 \quad 1013,5] \\ K_{K3} &= [-1338,3 \quad 2693,7 \quad -1068,3 \quad 863,7] \\ K_{I1} &= 637,9 \\ K_{I2} &= 862,4 \\ K_{I3} &= 343 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Sedangkan *pole-pole* sistem *loop* tertutupnya untuk tiap model adalah sebagai berikut:

**Tabel 4.1** Nilai *Pole* Sistem *Loop* Tertutup untuk Tiap Model pada Penempatan *Pole* Pertama

Model 1	Model 2	Model 3
$(1 \times 10^2) \times$	$(1 \times 10^2) \times$	
-1,0864 + 0,0000i	-1,1165 + 0,0000i	-25,8345 + 27,2467i
-0,0554 + 0,0601i	-0,0788 + 0,0530i	-25,8345 - 27,2467i
-0,0554 - 0,0601i	-0,0788 - 0,0530i	-5,8054 + 0,0000i
-0,0063 + 0,0000i	-0,0163 + 0,0000i	-1,2941 + 0,0000i
-0,0170 + 0,0000i	-0,0061 + 0,0000i	-0,3425 + 0,0000i

Untuk kondisi penempatan daerah *pole* kedua adalah berada pada  $r = 72$  dan  $q = 150$ . Sehingga diperoleh nilai matriks  $P$  dan  $K$  adalah sebagai berikut:

$$P = 1 \times 10^{11} \begin{bmatrix} 5,06 & -5,73 & 2,08 & -1,55 & -2,2 \\ -5,73 & 6,84 & -2,55 & 1,91 & 2,49 \\ 2,08 & -2,55 & 0,98 & -0,74 & -1,08 \\ -1,55 & 1,91 & -0,74 & 0,55 & 0,81 \\ -2,19 & 2,49 & -1,08 & 0,8 & 4,21 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

dan

$$\begin{aligned} K_1 &= [-4050,7 \quad 5323,7 \quad -2045,1 \quad 1559,7 \quad 1961] \\ K_2 &= [-4859,5 \quad 6629,5 \quad -2550,7 \quad 1959,9 \quad 2237,2] \\ K_3 &= [-2464,3 \quad 4067 \quad -1568 \quad 1244,4 \quad 824,1] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nilai *gain integrator* dan *gain kontrol* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} K_{K1} &= [-4050,7 \quad 5323,7 \quad -2045,1 \quad 1559,7] \\ K_{K2} &= [-4859,5 \quad 6629,5 \quad -2550,7 \quad 1959,9] \\ K_{K3} &= [-2464,3 \quad 4067 \quad -1568 \quad 1244,4] \\ K_{I1} &= 1961 \\ K_{I2} &= 2237,2 \\ K_{I3} &= 824,1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Untuk *pole-pole* sistem *loop* tertutupnya untuk tiap model adalah sebagai berikut:

**Tabel 4.2** Nilai *Pole* Sistem *Loop* Tertutup untuk Tiap Model pada Penempatan *Pole* Kedua

Model 1	Model 2	Model 3
$(1 \times 10^2) \times$ -2,3556 + 0,0000i -0,0522 + 0,0622i -0,0522 - 0,0622i -0,0069 + 0,0000i -0,0225 + 0,0000i	$(1 \times 10^2) \times$ -2,0085 + 0,0000i -0,0776 + 0,0557i -0,0776 - 0,0557i -0,0065 + 0,0000i -0,0218 + 0,0000i	-26,7526 + 34,8858i -26,7526 - 34,8858i -5,6132 + 0,0000i -1,7870 + 0,0000i -0,4496 + 0,0000i

Sedangkan untuk kondisi penempatan daerah *pole* ketiga adalah berada pada  $r = 162$  dan  $q = 330$ . Pada penempatan daerah *pole* ketiga ini diperoleh nilai matriks  $P$  dan  $K$  adalah sebagai berikut:

$$P = 1 \times 10^{11} \begin{bmatrix} 4,79 & -5,41 & 1,96 & -1,46 & -2,17 \\ -5,41 & 6,38 & -2,36 & 1,77 & 2,46 \\ 1,96 & -2,36 & 0,9 & -0,68 & -1,05 \\ -1,46 & 1,77 & -0,68 & 0,51 & 0,78 \\ -2,17 & 2,46 & -1,05 & 0,78 & 3,78 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

dan

$$\begin{aligned} K_1 &= [-9338 \quad 11808 \quad -4500 \quad 3414 \quad 4702] \\ K_2 &= [-8335 \quad 900 \quad -4159 \quad 3177 \quad 4024] \\ K_3 &= [-3700,5 \quad 5444 \quad -2080,6 \quad 1624,3 \quad 1503,8] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nilai *gain integrator* dan *gain kontrol* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} K_{K1} &= [-9338 \quad 11808 \quad -4500 \quad 3414] \\ K_{K2} &= [-8335 \quad 900 \quad -4159 \quad 3177] \\ K_{K3} &= [-3700,5 \quad 5444 \quad -2080,6 \quad 1624,3] \\ K_{I1} &= 4702 \\ K_{I2} &= 4024 \\ K_{I3} &= 1503,8 \end{aligned} \quad (4.7)$$

dan *pole-pole* sistem *loop* tertutupnya untuk tiap model adalah sebagai berikut:

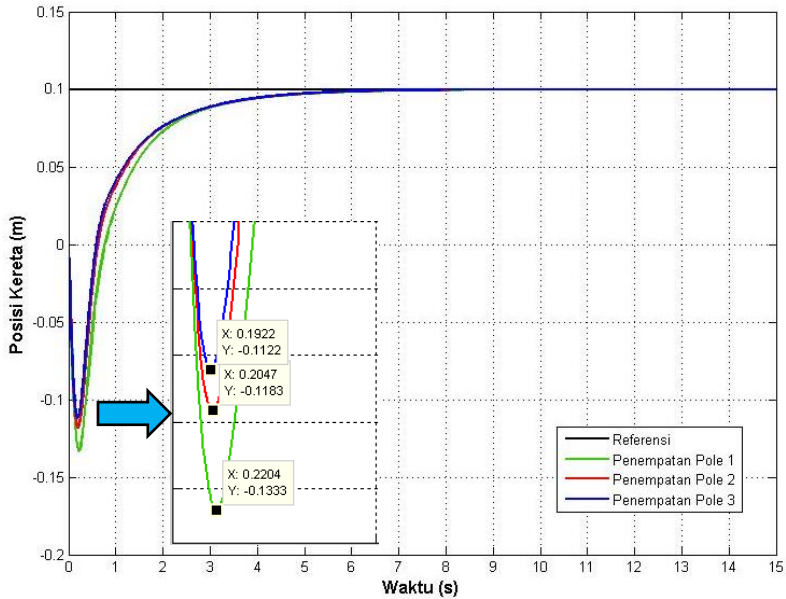
**Tabel 4.3** Nilai *Pole* Sistem *Loop* Tertutup untuk Tiap Model pada Penempatan *Pole* Ketiga

Model 1	Model 2	Model 3
$1 \times 10^2$	$1 \times 10^2$	
$-5,1266 + 0,0000i$	$-3,1734 + 0,0000i$	$-22,0327 + 44,5213i$
$-0,0509 + 0,0628i$	$-0,0773 + 0,0566i$	$-22,0327 - 44,5213i$
$-0,0509 - 0,0628i$	$-0,0773 - 0,0566i$	$-5,4539 + 0,0000i$
$-0,0071 + 0,0000i$	$-0,0068 + 0,0000i$	$-2,1094 + 0,0000i$
$-0,0242 + 0,0000i$	$-0,0237 + 0,0000i$	$-0,5602 + 0,0000i$

Hasil simulasi dengan berbagai variasi daerah *pole* dapat dilihat pada Gambar 4.1, Gambar 4.2 dan Gambar 4.3. Pada Gambar 4.1 menunjukkan posisi kereta pada sistem pendulum kereta dalam satuan meter untuk ketiga kondisi penempatan *pole*. Terlihat bahwa respon posisi kereta pada ketiga kondisi penempatan *pole* dapat melakukan *tracking* terhadap sinyal referensi yang diberikan. Pada penempatan *pole* pertama memiliki nilai *overshoot* -0,133 meter dan waktu yang dibutuhkan agar kereta dapat mengikuti sinyal referensi sebesar 5,5 detik. Nilai respon posisi kereta memiliki nilai *overshoot* sebesar -0,118 meter pada penempatan *pole* kedua dan nilai *overshoot* sebesar -0,112 meter



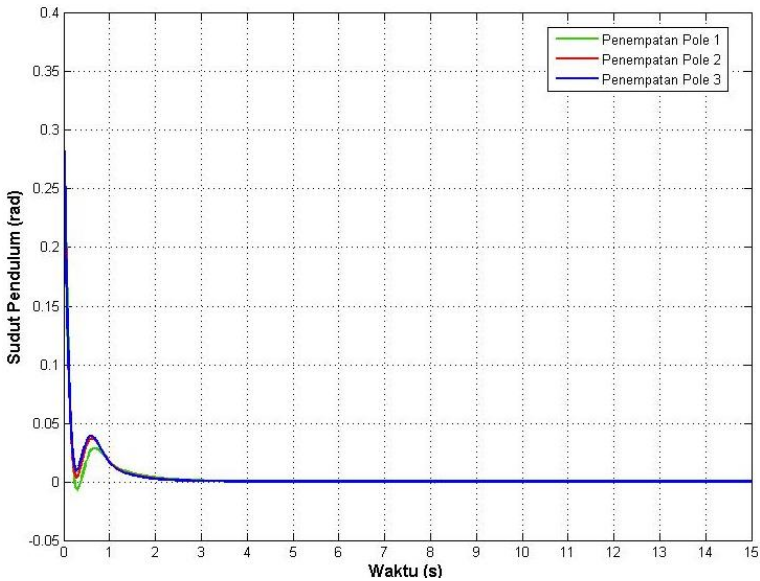
dengan waktu agar posisi kereta dapat mengikuti sinyal referensi sama pada penempatan *pole* pertama yaitu 5,5 detik.



**Gambar 4. 1** Posisi Kereta pada Simulasi Variasi Penempatan Pole

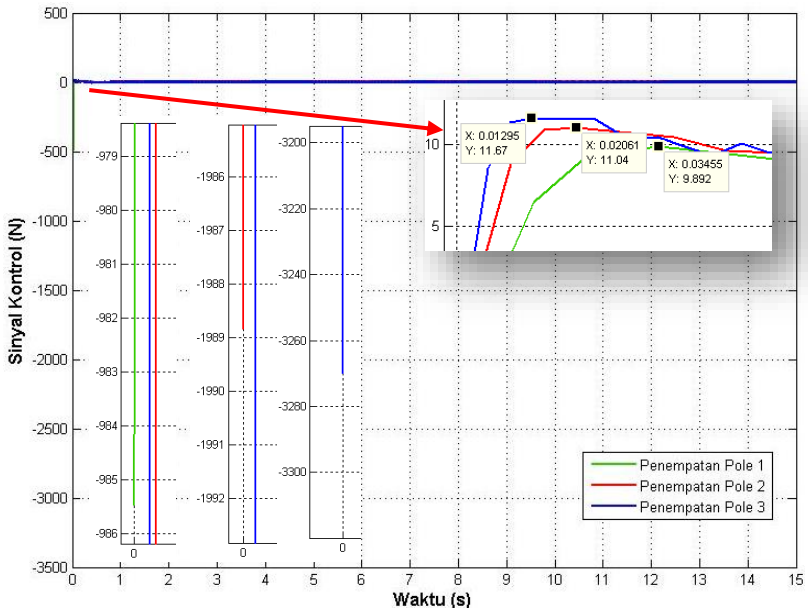
Pada Gambar 4.2 menunjukkan sudut pendulum dalam satuan radian untuk ketiga kondisi penempatan *pole*. Dari gambar 4.2 dapat dilihat bahwa untuk penempatan *pole* pertama *settling time* atau waktu yang dibutuhkan untuk mencapai 0 radian adalah sekitar 3,25 detik, penempatan *pole* kedua memerlukan waktu sekitar 3,1 detik, dan pada penempatan *pole* ketiga dibutuhkan waktu sekitar 2,9 detik.

Performansi *tracking* pada struktur kontrol hasil desain dapat dilihat bagaimana posisi kereta dapat mengikuti sinyal referensi dengan nilai *error* sekecil mungkin. Performansi *tracking* didapatkan pada daerah *steady state* dari selisih sinyal referensi dengan hasil *absolute respon output* posisi kereta (*Integral Absolute Error*). Nilai IAE pada skenario penempatan *pole* pertama sebesar 0,2351, penempatan *pole* kedua sebesar 0,2066 dan untuk penempatan *pole* ketiga adalah 0,1986



**Gambar 4. 2** Sudut Pendulum pada Simulasi Variasi Penempatan Pole

Gambar 4.3 menunjukkan respon sinyal kontrol yang dengan variasi penempatan *pole* yang dinyatakan dalam satuan Newton (N). Sinyal kontrol yang baik untuk diaplikasikan tidak memiliki *undershoot* lebih dari 200N. Pada penempatan daerah *pole* pertama sinyal kontrol untuk sistem pendulum kereta memiliki *overshoot* sebesar  $-985,5$  N, untuk penempatan *pole* kedua diperoleh nilai *overshoot*  $-1989$  N. Sedangkan pada penempatan *pole* ketiga memiliki nilai *overshoot* sebesar  $-3270$  N.



**Gambar 4. 3** Sinyal Kontrol pada Simulasi Variasi Penempatan *Pole*

**Tabel 4. 4** Perbandingan Hasil Simulasi dengan Berbagai Penempatan *Pole*

Kriteria	Kondisi awal [0;0,3;0;0] dengan penempatan pole didaerah [r,q]		
	[32,70]	[72,150]	[162,330]
<i>Overshoot</i> Posisi Kereta (m)	-0,133	-0,118	-0,112
<i>Settling time</i> Sudut Robot (s)	3,25	3,1	2,9
Sinyal Kontrol (N)	-985,5	-1989	-3270
<i>Integral Absolute Error</i> (IAE) (m)	0,2351	0,2066	0,1986

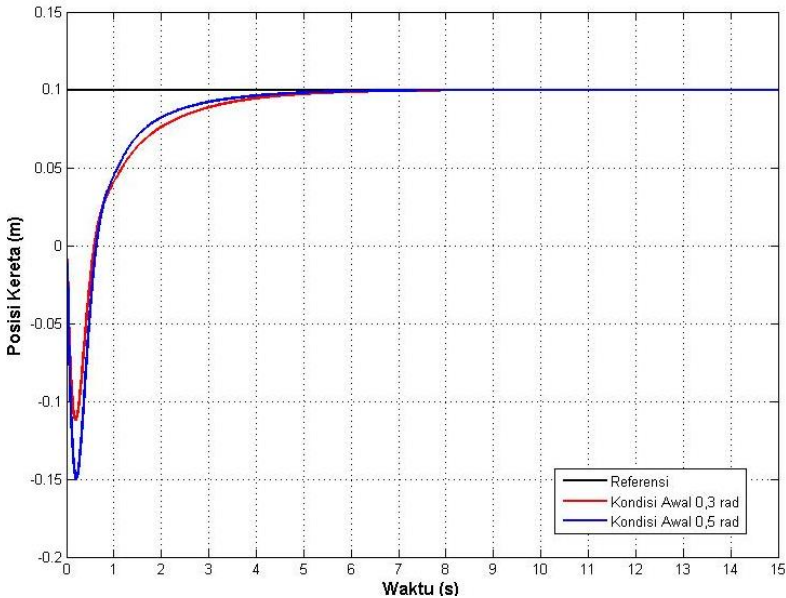
#### 4.1.1.2 Simulasi dengan Berbagai Kondisi Awal

Pada simulasi ini digunakan berbagai kondisi awal sudut pendulum. Nilai kondisi awal sudut pendulum yang disimulasikan yaitu 0,3 radian

dan 0,5 radian. Kondisi awal untuk posisi kereta, kecepatan kereta dan kecepatan sudut pendulum adalah 0. Pada simulasi ini digunakan skenario penempatan *pole* yang ketiga, dengan  $[r,q]=[162,330]$  karena memiliki hasil respon yang lebih baik dibandingkan dengan penempatan daerah *pole* yang lain dan nilai IAE yang terkecil.

Pada Gambar 4.4 menunjukkan respon posisi kereta dalam satuan meter dengan berbagai kondisi awal pada sudut pendulum. Respon menunjukkan bahwa posisi kereta pada kedua kondisi awal dapat melakukan *tracking* dengan mengikuti nilai referensi yang diberikan.

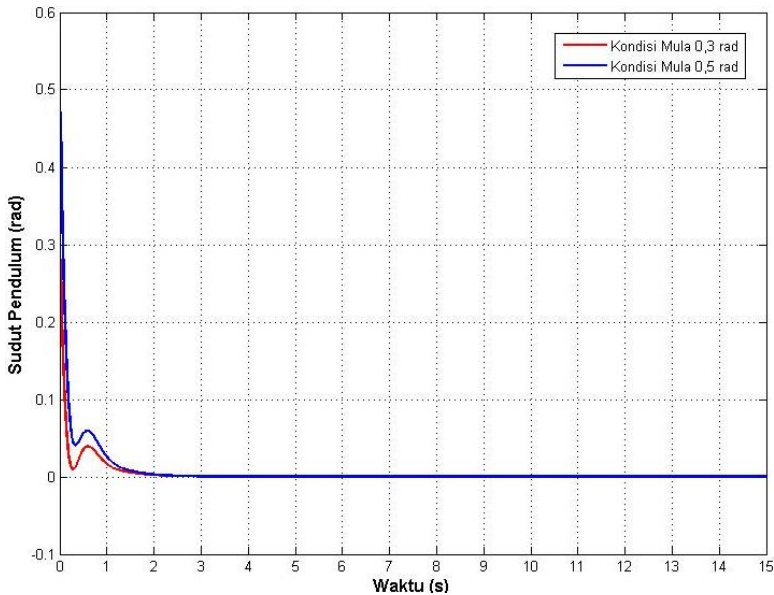
Pada kondisi awal 0,3 rad respon memiliki *overshoot* sebesar -0,112 rad. Sedangkan pada kondisi awal kedua, yaitu 0,5 rad nilai *overshoot* sebesar -0,15 rad.



**Gambar 4. 4** Posisi Kereta pada Simulasi dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum

Gambar 4.5 memperlihatkan respon sudut pendulum dengan berbagai kondisi awal. Pada kondisi awal 0,3 rad sudut pendulum memerlukan waktu untuk mencapai *settling time* atau waktu untuk

mencapai 0 radian adalah sekitar 2,9 detik, sedangkan untuk kondisi awal 0,5 radian waktu untuk sudut pendulum mencapai 0 radian adalah sekitar 3 detik.



**Gambar 4. 5** Sudut Pendulum pada Simulasi dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum

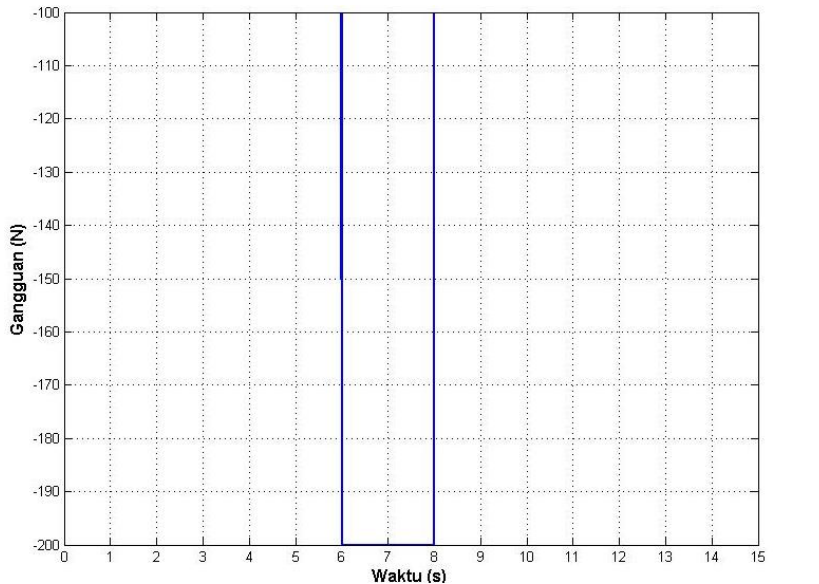
#### 4.1.1.3 Simulasi dengan Gangguan

Simulasi dengan gangguan dilakukan pada sinyal *step*, dengan memberikan gangguan pada sinyal kontrol. Simulasi menggunakan skenario penempatan *pole* ketiga [162,330] dan kondisi awal sudut pendulum 0,3 radian. Gangguan diberikan pada interval 6-8 detik. Gangguan yang diberikan pada sinyal kontrol ditunjukkan pada Gambar 4.6.

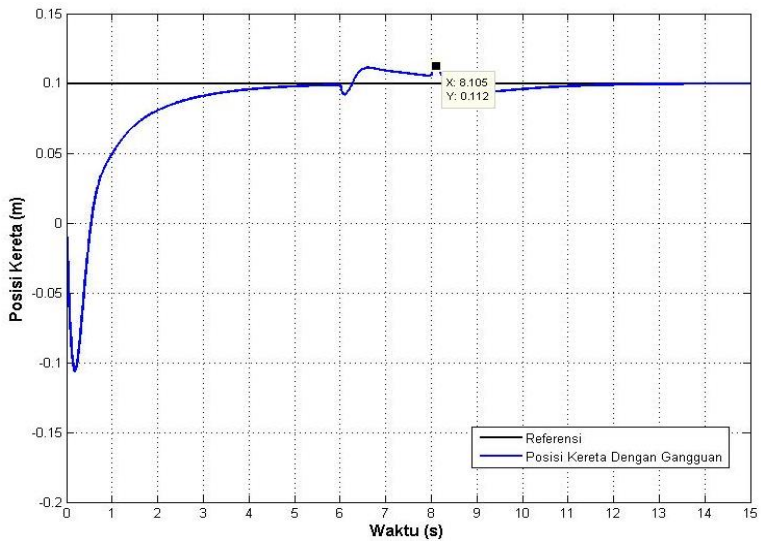
Respon sistem diperlihatkan pada Gambar 4.7 dan Gambar 4.8. Pada Gambar 4.7 menunjukkan posisi kereta ketika sistem diberikan gangguan. Ketika gangguan diberikan terjadi penyimpangan sekitar

0,012 meter. Selanjutnya sistem dapat mengatasi gangguan dan kembali mengikuti sinyal referensi setelah 11 detik.

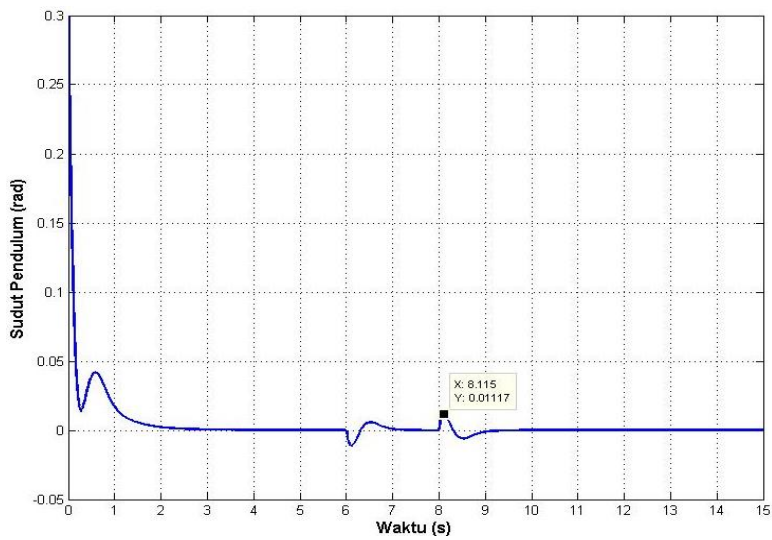
Gambar 4.8 menunjukkan respon sudut pendulum ketika diberikan gangguan. Pada respon tersebut dapat dilihat bahwa terdapat simpangan sekitar 0,01 radian pada detik ke-6 dan kembali stabil pada detik ke-7 sampai detik ke-8, kemudian terjadi simpangan sekitar 0,01 kembali pada detik ke-8 sampai detik ke-9. Lalu sudut pendulum dapat kembali menuju ke 0 radian.



**Gambar 4. 6** Gangguan Pada Sinyal Kontrol



**Gambar 4. 7** Posisi Kereta dengan Gangguan



**Gambar 4. 8** Sudut Pendulum dengan Gangguan

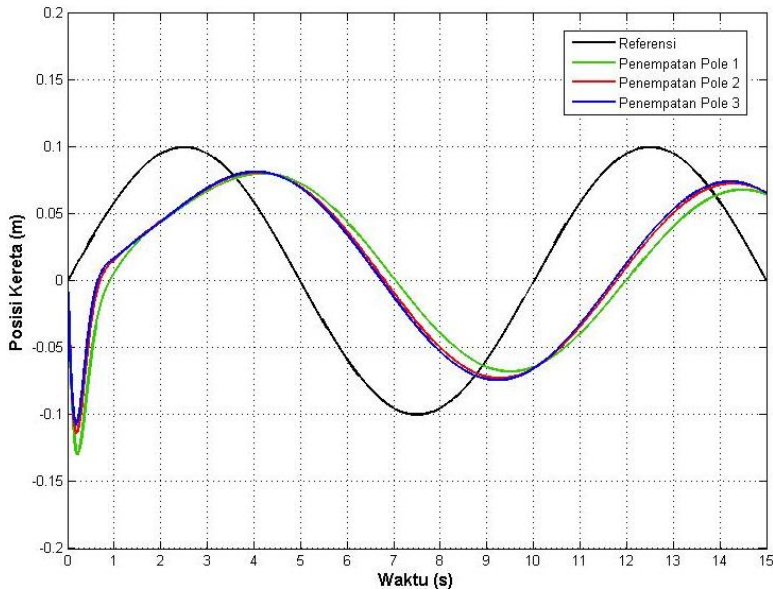
### 4.1.2 Simulasi Menggunakan Sinyal Sinus

Pada simulasi kedua digunakan sinyal referensi sinus yang dihasilkan dari *Signal Generator* yang dapat ditemukan di *library source* pada *Simulink*.

#### 4.1.2.1 Simulasi dengan Berbagai Variasi Penempatan *Pole*

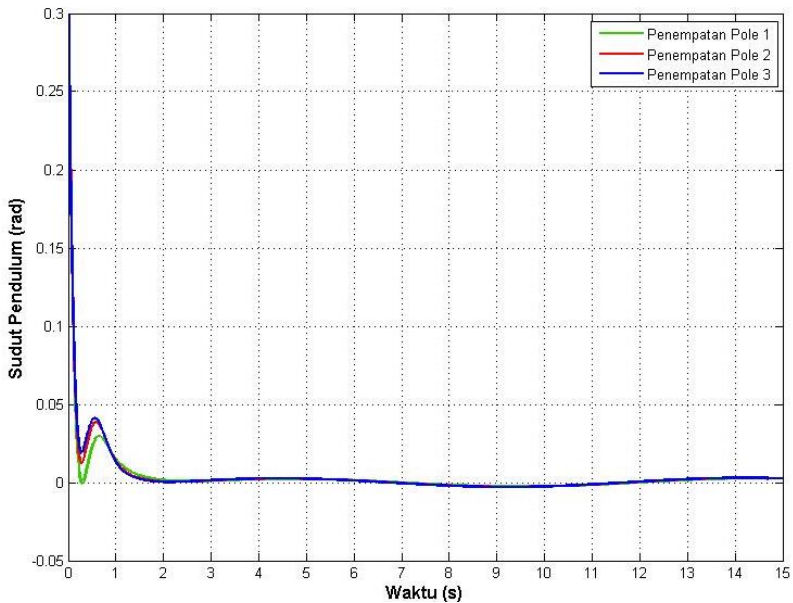
Sama seperti pada simulasi dengan menggunakan sinyal step, simulasi dilakukan dengan kondisi awal sudut pendulum 0,3 radian. Kondisi awal untuk posisi kereta, kecepatan kereta dan kecepatan sudut pendulum adalah 0

Gambar 4.9 menampilkan hasil simulasi posisi kereta dengan sinyal referensi berupa sinyal sinus, dengan membandingkan beberapa kondisi penempatan *pole*. Pada Gambar 4.10 ditampilkan hasil simulasi sudut pendulum dengan sinyal referensi sinyal sinus yang berasal dari *signal generator*.



**Gambar 4. 9** Posisi Kereta pada Simulasi Variasi Penempatan *Pole* dengan Referensi Sinyal Sinus



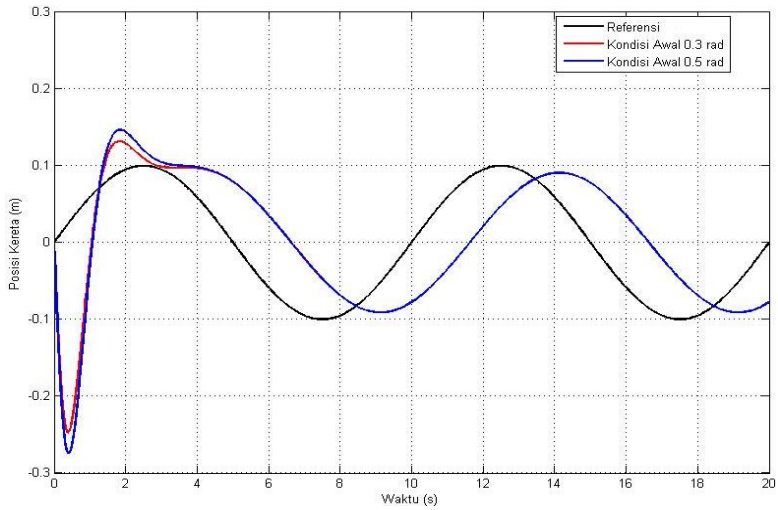


**Gambar 4. 10** Sudut Pendulum pada Simulasi Variasi Penempatan *Pole* dengan Referensi Sinus

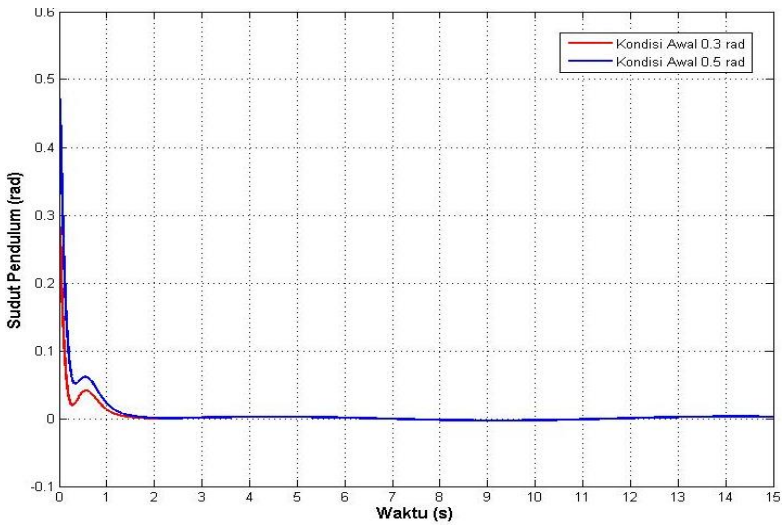
#### 4.1.2.2 Simulasi dengan Berbagai Kondisi Awal

Setelah dilakukan simulasi dengan variasi penempatan *pole* diperoleh hasil respon dan nilai *Integral Absolute Error* yang lebih baik daripada penempatan *pole* yang lain. Sehingga pada simulasi kali ini digunakan variasi penempatan *pole* yang kedua yaitu  $[r,q]=[162,330]$  dengan berbagai kondisi awal. Kondisi awal sudut pendulum yang digunakan adalah 0,3 radian dan 0,5 radian.

Gambar 4.11 menunjukkan posisi kereta dalam satuan meter dengan kedua kondisi awal sudut pendulum. Gambar 4.12 adalah respon sudut pendulum dalam satuan radian.



**Gambar 4. 11** Posisi Kereta dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum



**Gambar 4.12** Sudut Pendulum dengan Berbagai Kondisi Awal Sudut Pendulum

Pada Gambar 4.9 dan Gambar 4.11 dapat dilihat bahwa posisi kereta dapat mengikuti sinyal referensi, namun terdapat beda fase pada respon posisi kereta, beda fase tersebut menunjukkan bahwa struktur *servo* tipe 1 untuk plant tanpa *integrator* yang digunakan adalah struktur yang dapat digunakan untuk sinyal referensi step. Karena untuk sinyal referensi sinus, terdapat waktu *delay* untuk respon dapat mengikuti sinyal referesnsi sinus tersebut.

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## **BAB 5**

### **PENUTUP**

Pada Bab ini membahas kesimpulan dari simulasi dan analisa yang dilakukan pada Bab 4, serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

#### **5.1 Kesimpulan**

Setelah melakukan pengujian pada Tugas Akhir ini menggunakan sistem kontrol *fuzzy* Takagi-Sugeno dengan struktur Sistem *Servo* Tipe 1 dengan *plant* tanpa *integrator* yang telah dirancang menggunakan pendekatan LMI (*Linear Matrix Inequalities*) dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Hasil simulasi dari sistem kontrol *fuzzy* Takagi-Sugeno yang telah dibuat menunjukkan bahwa posisi kereta dapat mengikuti masukan berupa sinyal referensi *step* dengan batang pendulum dapat distabilkan pada titik di sekitar nol radian.
2. Beda fase yang terjadi ketika sinyal referensi yang diberikan berupa sinyal sinus menunjukkan bahwa kereta dapat mengikuti referensi tetapi terdapat beda fase
3. Berdasarkan simulasi yang dilakukan didapatkan hasil respon terbaik dihasilkan dengan menggunakan penempatan *pole*  $[r,q]=[162, 330]$  dan kondisi awal sudut pendulum yaitu 0,3 radian
4. Hasil simulasi untuk sinyal referensi *step* melalui optimasi menggunakan LMI menghasilkan nilai IAE (*Integral Absolute Error*) sebesar 0,1986 m.

#### **5.2 Saran**

Untuk struktur Sistem *Servo* Tipe 1 untuk *plant* tanpa *integrator* sebaiknya tidak menggunakan sinyal referensi sinus. Karena terdapat beda fase antara respon posisi kereta dan sinyal referensi yang diberikan. Untuk perkembangan selanjutnya dapat diujikan dengan strategi dan struktur kontrol lain yang dapat melakukan *tracking* secara sempurna dengan menggunakan sinyal referensi sinus.

*Halaman ini sengaja dikosongkan*

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Adenia, Rahma. Putri, "Kontrol Tracking Fuzzy-Optimal untuk Sistem Pendulum Kereta". *Tugas Akhir Teknik Elektro ITS*, Surabaya, 2013
- [2] J. H. S. Putra, "Kontrol Tracking Fuzzy Menggunakan Model Following Untuk Sistem Pendulum Kereta," *Tugas Akhir Teknik Elektro ITS*, Surabaya, 2016.
- [3] H. Indrawati, "Kontrol Fuzzy Takagi-Sugeno Berbasis Sistem Servo Tipe 1 Untuk Sistem Pendulum Kereta," *Tugas Akhir Teknik Elektro ITS*, 2013
- [4] N. N. A. Putri, "Kontrol Tracking pada Sistem Pendulum Kereta Berbasis Model Fuzzy Takagi-Sugeno Menggunakan Pendekatan PDC Modifikasi," *Tugas Akhir Teknik Elektro ITS*, Surabaya, 2015
- [5] ———, "*Digital Pendulum: Control in MATLAB Environment (MATLAB 6.5 Version)*", Feedback Instruments Ltd, 2004
- [6] Ogata, Katsuhiko, "*Modern Control Engineering*," 3<sup>rd</sup> ed., Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
- [7] Agus N.E., "*Belajar Cepat Fuzzy Logic Menggunakan MATLAB*," ANDI, Yogyakarta, 2009.
- [8] Trihastuti A., Bahrudin, A. Jazidie, "Implementasi Kontrol Tracking Fuzzy Menggunakan Sistem Servo Tipe Integral Berbasis Observer Fuzzy Takagi-Sugeno pada Inverted Pendulum," *Proceeding Seminar Nasional Electrical, Informatics, and It's Education*, Malang, 2009.
- [9] Tiara F., "Kontrol Tracking pada Sistem Pendulum-Kereta Menggunakan Fuzzy-Integral Sliding Mode Control," *Tugas Akhir Teknik Elektro ITS*, Surabaya, 2013.
- [10] Boyd, Stephen, El Ghaoui, L., Feron, Eric, dan Balakrishnan, V., "*Linear Matrix Inequality in System and Control Theory*", SIAM, Philadelphia, 1994
- [11] M. Chilali and P. Gahinet, " $H_\infty$  Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 41, pp. 358-367, 1996.
- [12] K. Tanaka and H. O. Wang, "*Fuzzy Control Systems Design and Analysis*," John Wiley & Sons, Inc, 2001.

*Halaman ini Sengaja dikosongkan*



## LAMPIRAN A

### A.2 Penurunan Model Matematika *Plant* Pendulum

Kecepatan kereta merupakan turunan pertama dari posisi kereta

$$x_3 = \frac{dx_1}{dt} = x_1' \quad (\text{A.1})$$

Kecepatan sudut merupakan turunan pertama dari sudut

$$x_4 = \frac{dx_2}{dt} = x_2' \quad (\text{A.2})$$

Dalam penurunan dinamika sistem, berlaku hukum Newton II yang menghasilkan persamaan gerak secara translasi dan rotasi. Persamaan gerak translasi meliputi persamaan gerak translasi pada bidang horizontal dan bidang vertikal.

Persamaan gerak translasi pada bidang horizontal dan percepatan pusat massa pada bidang horizontal dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum F_x = ma_x \quad (\text{A.3})$$

$$a_x = (x_1 - l \sin x_2)'' \quad (\text{A.4})$$

Dari kedua persamaan tersebut dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u - T_c &= (m_c + m_p)(x_1 - l \sin x_2)'' \\ u - T_c &= (m_c + m_p)(x_1' - x_2' l \cos x_2)' \\ u - T_c &= (m_c + m_p)(x_1'' - x_2'' l \cos x_2 + (x_2')^2 l \sin x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Persamaan gerak translasi pada bidang vertikal dan percepatan pusat massa pada bidang vertikal dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum F_y = ma_y \quad (\text{A.6})$$

$$a_y = (l \cos x_2)'' \quad (\text{A.7})$$

Dari kedua persamaan tersebut dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V - (m_c + m_p)g &= (m_c + m_p)(l \cos x_2)'' \\ V &= (m_c + m_p)g + (m_c + m_p)(-l x_2' \sin x_2)' \\ V &= (m_c + m_p)g + (m_c + m_p)(-l x_2'' \sin x_2 - l (x_2')^2 \cos x_2) \\ V &= (m_c + m_p)(g - l x_2'' \sin x_2 - l (x_2')^2 \cos x_2) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Persamaan gerak rotasi dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum \tau = J\alpha \quad (\text{A.9})$$

Dimana  $\alpha$  adalah percepatan sudut dan  $\tau$  adalah torsi yang berkerja pada sistem. Persamaan gerak rotasi diperlihatkan pada persamaan berikut:

$$\begin{aligned}(u - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - D_p &= Jx_2'' \\ (u - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - f_p x_4 &= Jx_2''\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

Dinamika state  $x_4$  didapatkan dengan mensubstitusikan Persamaan (A.8) ke dalam Persamaan (A.10), sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}Jx_2'' &= (u - T_c)l \cos x_2 + Vl \sin x_2 - f_p x_4 \\ Jx_2'' &= (u - T_c)l \cos x_2 + ((m_c + m_p) \\ &\quad (g - lx_2'' \sin x_2 - l(x_2')^2 \cos x_2))l \sin x_2 - f_p x_4\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

Dengan mendefinisikan bahwa  $\mu = (m_c + m_p)l$  dan diketahui  $x_2' = x_4$  maka akan didapatkan dinamika persamaan state  $x_4$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}Jx_4' &= (u - T_c)l \cos x_2 + ((m_c + m_p) \\ &\quad (g - lx_4' \sin x_2 - lx_4'^2 \cos x_2))l \sin x_2 - f_p x_4 \\ Jx_4' &= (u - T_c)l \cos x_2 - f_p x_4 + \\ &\quad (m_c + m_p)l(g \sin x_2 - l \sin^2 x_2 x_4' - lx_4'^2 \cos x_2 \sin x_2) \\ Jx_4' &= (u - T_c)l \cos x_2 - f_p x_4 + \\ &\quad (\mu g \sin x_2 - \mu l \sin^2 x_2 x_4' - \mu lx_4'^2 \cos x_2 \sin x_2) \\ Jx_4' &= (u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2 + \\ &\quad \mu g \sin x_2 - \mu l \sin^2 x_2 x_4' - f_p x_4 \\ x_4'(J + \mu l \sin^2 x_2) &= (u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4 \\ x_4' &= \frac{(u - T_c - \mu x_4'^2 \sin x_2)l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2}\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

Sedangkan dinamika state  $x_3$  didapatkan dari Persamaan (A.5) dengan mengetahui nilai  $x_1' = x_3$  dan  $x_2' = x_4$ , sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}u - T_c &= (m_c + m_p)(x_1'' - x_2'' l \cos x_2 + (x_2')^2 l \sin x_2) \\ u - T_c &= (m_c + m_p)(x_3' - x_4' l \cos x_2 + x_4'^2 l \sin x_2) \\ u - T_c &= (m_c + m_p)x_3' - (m_c + m_p)x_4' l \cos x_2 + \\ &\quad (m_c + m_p)x_4'^2 l \sin x_2 \\ u - T_c &= (m_c + m_p)x_3' - \mu x_4' \cos x_2 + \mu x_4'^2 \sin x_2 \\ u - T_c + \mu x_4' \cos x_2 - \mu x_4'^2 \sin x_2 &= (m_c + m_p)x_3'\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

Dengan mendefinisikan bahwa  $a = \frac{l^2+J}{m_c+m_p}$  serta mensubstitusikan

Persamaan (A.12) dan (A.13) maka akan didapatkan dinamika persamaan state  $x_3$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 (m_c + m_p)x_3' &= u - T_c + \mu x_4' \cos x_2 - \mu x_4^2 \sin x_2 \\
 (m_c + m_p)x_3' &= u - T_c + \\
 &\quad \mu \left( \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \right) \\
 &\quad \cos x_2 - \mu x_4^2 \sin x_2 \\
 (m_c + m_p)x_3' &= u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2 \\
 &\quad + \frac{\mu l \cos^2 x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 &\quad + \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 (m_c + m_p)x_3' &= \frac{(J + \mu l \sin^2 x_2)(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 &\quad + \frac{\mu l \cos^2 x_2 (u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 &\quad + \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 (m_c + m_p)x_3' &= \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)(J + \mu l \sin^2 x_2 + \mu l \cos^2 x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 &\quad + \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 (m_c + m_p)x_3' &= \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)((J + \mu l)(\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2))}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 &\quad + \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 (m_c + m_p)x_3' &= \frac{(J + \mu l)(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 &\quad + \frac{\mu \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
 x_3' &= \frac{(J + \mu l)l(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{(m_c + m_p)l(J + \mu l \sin^2 x_2)} + \frac{\mu l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(m_c + m_p)l(J + \mu l \sin^2 x_2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3' &= \left( \frac{Jl}{(m_c + m_p)l} + \frac{\mu l^2}{(m_c + m_p)l} \right) \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)} + \\
&\quad \frac{\mu l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{\mu (J + \mu l \sin^2 x_2)} \\
x_3' &= \left( \frac{J}{(m_c + m_p)} + \frac{\mu l^2}{\mu} \right) \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)} \\
&\quad + \frac{l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)} \\
x_3' &= \left( \frac{J + l^2}{(m_c + m_p)} \right) \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)} \\
&\quad + \frac{l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)} \\
x_3' &= \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)} + \frac{l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)} \quad (A.14)
\end{aligned}$$

Maka model matematika dalam bentuk persamaan state dapat dituliskan sebagai berikut:

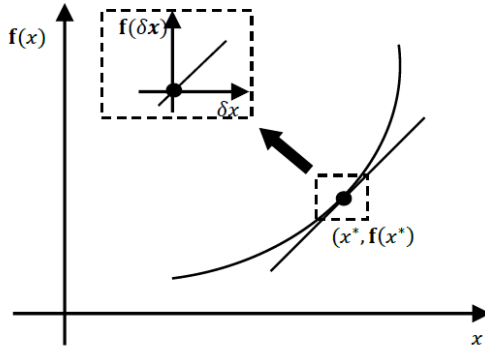
$$\begin{aligned}
x_1' &= x_3 \\
x_2' &= x_4 \\
x_3' &= \frac{a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)} + \frac{l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)} \\
x_4' &= \frac{(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2}
\end{aligned}$$

## A.2 Elemen-elemen Matriks Model Linear *Plant* Pendulum

Suatu sistem yang nonlinear dilakukan pendekatan model linear untuk melinearkan persamaan-persamaan nonlinear pada sistem tersebut. Sebuah sistem nonlinear dinyatakan sebagai berikut:

$$x' = f(x) \quad (A.15)$$

Dimana  $y = f(x)$  adalah kurva yang ditunjukkan pada gambar berikut ini:



**Gambar A. 1** Linearisasi  $y = f(x)$  pada sekitar  $x^*$

Sehingga garis singgung pada titik  $x^*$  merepresentasikan pendekatan linear  $f(x)$  di sekitar titik  $x^*$ . Hasil linearisasi dari sistem dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\delta y = f(\delta x) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} \delta x \quad (\text{A.16})$$

dengan  $\delta x = x - x^*$  dan  $\delta y = f(x) - f(x^*)$ . Dimana titik kerja  $x^*$  disebut sebagai titik pusat dari hasil linearisasi.

Jika titik kerja sistem berada pada origin, dan sistem dilinearisasi pada titik kerjanya, maka  $f(x^*) = 0$  sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$f(x) = x' = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x^*} x \quad (\text{A.17})$$

Pada sistem nonlinier lup terbuka terdapat state sejumlah  $n$ , maka linearisasi sistem pada titik kerja  $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$  menjadi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{x_1=x_1^* \\ \vdots \\ x_n=x_n^*}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$x' = Ax \quad (A.18)$$

dimana

$$x = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \text{ dan } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{x_1=x_1^* \\ \vdots \\ x_n=x_n^*}}$$

Dengan demikian matriks A merupakan matriks Jacobian dari  $f(x)$ . Sistem nonlinear dapat didekati menjadi sistem linear berdasarkan hasil linearisasi di sekitar titik kerjanya dan dapat direpresentasikan dalam persamaan berikut:

$$x' = f(x) + h(x, u) \quad (A.19)$$

Apabila jumlah state dalam sistem adalah n, maka linearisasi sistem pada titik kerja  $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, u^*]$  adalah sebagai berikut:

$$x' = Ax + Bu \quad (A.20)$$

dengan  $x = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \bigg|_{x_1=x_1^*} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x, u)}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_n(x, u)}{\partial u} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{x=x^* \\ u=u^*}}$$

Dari Persamaan (A.19) maka didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$f_1(x) = x_3$$

$$f_2(x) = x_4$$

$$f_3(x) = \frac{a(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)} + \frac{l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)}$$

$$f_4(x) = \frac{(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2} \quad (A.20)$$

Dan

$$h_1(x, u) = 0$$

$$h_2(x, u) = 0$$

$$h_3(x, u) = \frac{au}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$h_4(x, u) = \frac{ul \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2} \quad (A.21)$$

Dari Persamaan (A.20) dan (A.21) tersebut selanjutnya akan didapatkan elemen-elemen dari matriks A dan matriks B sebagai berikut:

- Elemen-elemen matriks A:

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_3} = 1, \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_4} = 1$$

$$\frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1} = 0$$

$$f_3(x) = \frac{a(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{(J + \mu \sin^2 x_2)} + \frac{l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu \sin^2 x_2)}$$

$$u = -aT_c - a\mu x_4^2 \sin x_2 + l \cos x_2 \mu g \sin x_2 - l \cos x_2 f_p x_4$$

$$u' = -a\mu x_4^2 \cos x_2 + l \mu g (-\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2) + l f_p x_4 \sin x_2$$

$$v = J + \mu \sin^2 x_2$$

$$v' = 2 \mu \sin x_2 \cos x_2$$

$$\frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\begin{aligned} & (-a\mu x_4^2 \cos x_2 + l \mu g (-\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2) + l f_p x_4 \sin x_2)(J + \mu \sin^2 x_2) - \\ & (-aT_c - a\mu x_4^2 \sin x_2 + l \cos x_2 \mu g \sin x_2 - l \cos x_2 f_p x_4)(2 \mu \sin x_2 \cos x_2) \\ & = \frac{(J + \mu \sin^2 x_2)^2}{(J + \mu \sin^2 x_2)^2} - \\ & = \frac{-a\mu x_4^2 \cos x_2 + l \mu g (-\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2) + l f_p x_4 \sin x_2}{J + \mu \sin^2 x_2} - \\ & \quad \frac{(2 \mu \sin x_2 \cos x_2)(-aT_c - a\mu x_4^2 \sin x_2)}{(J + \mu \sin^2 x_2)^2} + \\ & \quad \frac{(2 \mu \sin x_2 \cos x_2)(l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4))}{(J + \mu \sin^2 x_2)^2} \\ & = \frac{-a\mu x_4^2 \cos x_2 + l \mu g \cos^2 x_2 - l \sin x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{J + \mu \sin^2 x_2} - \\ & \quad \frac{(2 \mu \sin x_2 \cos x_2)((-aT_c - a\mu x_4^2 \sin x_2))}{(J + \mu \sin^2 x_2)^2} + \end{aligned}$$

$$\frac{(2 \mu l \sin x_2 \cos x_2) (l \cos x_2 (\mu g \sin x_2 - f_p x_4))}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2}$$

$$u = -aT_c - a\mu x_4^2 \sin x_2 + l \cos x_2 \mu g \sin x_2 - l \cos x_2 f_p x_4 \quad \text{dikali } (-)$$

$$u = aT_c + a\mu x_4^2 \sin x_2 - l \cos x_2 \mu g \sin x_2 + l \cos x_2 f_p x_4$$

$$u' = \frac{a \partial T_c}{\partial x_3}$$

$$v = J + \mu l \sin^2 x_2$$

$$v' = 0$$

$$\frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{(\frac{a \partial T_c}{\partial x_3})(J + \mu l \sin^2 x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} = \frac{a}{J + \mu l \sin^2 x_2} \frac{\partial T_c}{\partial x_3}$$

$$u = -aT_c - a\mu x_4^2 \sin x_2 + l \cos x_2 \mu g \sin x_2 - l \cos x_2 f_p x_4$$

$$u' = -2a\mu x_4 \sin x_2 - l \cos x_2 f_p$$

$$v = J + \mu l \sin^2 x_2$$

$$v' = 0$$

$$\frac{\partial f_3(x)}{\partial x_4} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-2a\mu x_4 \sin x_2 - l \cos x_2 f_p)(J + \mu l \sin^2 x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\ &= \frac{-2a\mu x_4 \sin x_2 - l \cos x_2 f_p}{J + \mu l \sin^2 x_2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_4(x)}{\partial x_1} = 0$$

$$f_4(x) = \frac{(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) l \cos x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4}{J + \mu l \sin^2 x_2}$$

$$u = l \cos x_2 (-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4$$

$$= -l T_c \cos x_2 - l \mu x_4^2 \cos x_2 \sin x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4$$

$$u' = l T_c \sin x_2 - l \mu x_4^2 (-\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2) + \mu g \cos x_2$$



$$v = J + \mu l \sin^2 x_2$$

$$v' = 2 \mu l \sin x_2 \cos x_2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_2} &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{(lT_c \sin x_2 - \mu x_4^2(-\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2) + \mu g \cos x_2)(J + \mu l \sin^2 x_2) - (l \cos x_2(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4)(2 \mu l \sin x_2 \cos x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\ &= \frac{lT_c \sin x_2 - \mu x_4^2(-\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2) + \mu g \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2} - \frac{(2 \mu l \sin x_2 \cos x_2)(l \cos x_2(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2))}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} + \frac{(2 \mu l \sin x_2 \cos x_2)(\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\ &= \frac{\mu g \cos x_2 - \mu x_4^2 \cos^2 x_2 - l \sin x_2(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2)}{J + \mu l \sin^2 x_2} - \frac{(2 \mu l \sin x_2 \cos x_2)(l \cos x_2(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2))}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} + \frac{(2 \mu l \sin x_2 \cos x_2)(\mu g \sin x_2 - f_p x_4)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\ u &= l \cos x_2(-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4 \\ &= -lT_c \cos x_2 - \mu x_4^2 \cos x_2 \sin x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4 \\ &= lT_c \cos x_2 + \mu x_4^2 \cos x_2 \sin x_2 - \mu g \sin x_2 + f_p x_4 \\ u' &= l \cos x_2 \frac{\partial T_c}{\partial x_3} \\ v &= J + \mu l \sin^2 x_2 \\ v' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4(x)}{\partial x_3} &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{(l \cos x_2 \frac{\partial T_c}{\partial x_3})(J + \mu l \sin^2 x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} = \frac{l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2} \frac{\partial T_c}{\partial x_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u &= l \cos x_2 (-T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - f_p x_4 \\
&= -l T_c \cos x_2 - l \mu x_4^2 \cos x_2 \sin x_2 + \mu g \sin x_2 - f_p x_4 \\
u' &= -2l \mu x_4 \cos x_2 \sin x_2 - f_p \\
v &= J + \mu l \sin^2 x_2 \\
v' &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_4(x)}{\partial x_4} &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
&= \frac{(-2l \mu x_4 \cos x_2 \sin x_2 - f_p)(J + \mu l \sin^2 x_2)}{(J + \mu l \sin^2 x_2)^2} \\
&= \frac{-2l \mu x_4 \cos x_2 \sin x_2 - f_p}{J + \mu l \sin^2 x_2}
\end{aligned}$$

- Elemen-elemen matriks B:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_1(x, u)}{\partial u} &= 0 \\
\frac{\partial h_2(x, u)}{\partial u} &= 0 \\
\frac{\partial h_3(x, u)}{\partial u} &= \frac{a}{J + \mu l \sin^2 x_2} \\
\frac{\partial h_3(x, u)}{\partial u} &= \frac{l \cos x_2}{J + \mu l \sin^2 x_2}
\end{aligned}$$

### A.3 Penurunan LMI

Pertidaksamaan Lyapunov

$$[(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i)] < 0, i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{G}_{ij}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{G}_{ij} < 0, i < j \leq r \quad (\text{A.23})$$

dengan

$$\mathbf{G}_{ij} = \frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \mathbf{K}_i}{2} \quad (\text{A.24})$$

Kemudian menyelesaikan (A.22), karena pada pertidaksamaan tersebut terdapat dua variabel yang tidak diketahui maka diperlukan variabel pengubah seperti Persamaan (A.25).

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= \mathbf{P}^{-1} \\
\mathbf{Y}_i &= \mathbf{K}_i \mathbf{Q}
\end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Kemudian *pre multiplying* dan *post multiplying* kedua sisi dari pertidaksamaan dengan  $P^{-1}$  dan dengan menggunakan variabel peubah (A.25) serta dimasukkan kedalam (A.22) diperoleh.

$$\begin{aligned} P^{-1}[(A_i - B_i K_i)^T P + P(A_i - B_i K_i)]P^{-1} &< 0 \\ P^{-1}A_i^T - P^{-1}K_i^T B_i^T + A_i P^{-1} - B_i K_i P^{-1} &< 0 \\ QA_i^T - QQ^{-1}Y_i^T B_i^T + A_i Q - B_i Y_i Q &< 0 \\ A_i Q + QA_i^{-1} - B_i Y_i - Y_i^T B_i^T &< 0, i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (A. 26)$$

dan untuk (A.23), penurunan rumusnya sebagai berikut

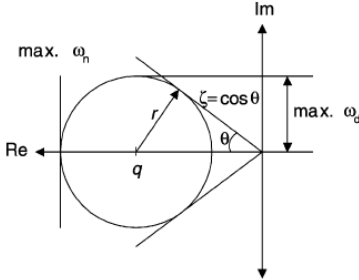
$$\begin{aligned} G_{ij}^T P + PG_{ij} &< 0 \\ \left( \frac{(A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i)^T}{2} \right) P + P \left( \frac{(A_i - B_i K_j + A_j - B_j K_i)}{2} \right) &< 0 \\ \left( \frac{P^{-1}[A_i^T P - K_j^T B_i^T P + A_j^T P - K_i^T B_j^T P]P^{-1}}{2} \right) + \\ \left( \frac{P^{-1}[PA_i - PB_i K_j + PA_j - PB_j K_i]P^{-1}}{2} \right) &< 0 \\ \left( \frac{P^{-1}A_i^T - P^{-1}K_j^T B_i^T + P^{-1}A_j^T - P^{-1}K_i^T B_j^T}{2} \right) + \\ \left( \frac{A_i P^{-1} - B_i K_j P^{-1} + A_j P^{-1} - B_j K_i P^{-1}}{2} \right) &< 0 \\ \left( \frac{QA_i^T - QQ^{-1}Y_j^T B_i^T + QA_j^T - QQ^{-1}Y_i^T B_j^T}{2} \right) + \\ \left( \frac{A_i Q - B_i Y_j Q^{-1}Q + A_j Q - B_j Y_i Q^{-1}Q}{2} \right) &< 0 \\ \frac{1}{2}[(A_i Q + QA_i^{-1} - B_i Y_j - Y_j^T B_i^T) \\ + \frac{1}{2}(A_i Q + QA_i^{-1} - B_i Y_i - Y_i^T B_i^T)] &< 0, i < j \leq r \end{aligned} \quad (A. 27)$$

#### A.4 Penurunan LMI dengan Penempatan Pole

Jika LMI menghasilkan solusi matrik  $P$  yang bernilai definit positif, maka kestabilan dari sistem ini terjamin. Tetapi untuk mendapatkan hasil yang lebih baik, pada penelitian ini digunakan batasan berupa penempatan *pole*. Menurut Chilali dan Gahinet [2], daerah  $D$  lingkaran LMI diilustrasikan pada Persamaan A.28, yaitu

$$D_{q,r} = \{x + jy \in \mathbb{C} : (x + q)^2 + y^2 < r^2\} \quad (A. 28)$$

Persamaan A.28, jika diilustrasikan kedalam gambar akan membentuk lingkaran dengan titik pusat lingkaran  $(-q, 0)$  dan jari-jari lingkaran  $r$  (dengan  $r > 0$ ). Lingkaran tersebut berada sebelah kiri sumbu imajiner seperti pada Gambar A.2



**Gambar A. 2** Lokasi *pole* dari lingkaran daerah D

Dari Gambar A.2 terlihat bahwa titik pusat lingkaran  $(-q, 0)$ , dan radius  $r > 0$ , serta memiliki fungsi karakteristik sebagai berikut

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} -r & \bar{z} + q \\ z + q & -r \end{pmatrix} \quad (\text{A. 29})$$

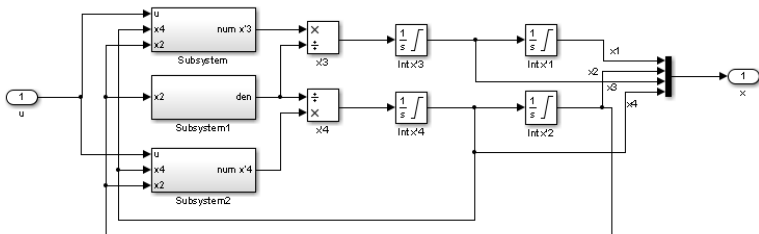
Sistem kontrol *fuzzy* akan stabil pada daerah D (dengan semua *pole* kompleks berada pada daerah D) jika dan hanya jika memenuhi persamaan berikut ini.

$$\begin{bmatrix} -r\mathbf{Q} & q\mathbf{Q} + \mathbf{QA}_i^T + \mathbf{Y}_i^T\mathbf{B}_i^T \\ q\mathbf{Q} + \mathbf{QA}_i^T + \mathbf{B}_i\mathbf{Y}_i & -r\mathbf{Q} \end{bmatrix} < 0, i < j \leq r \quad (\text{A. 30})$$

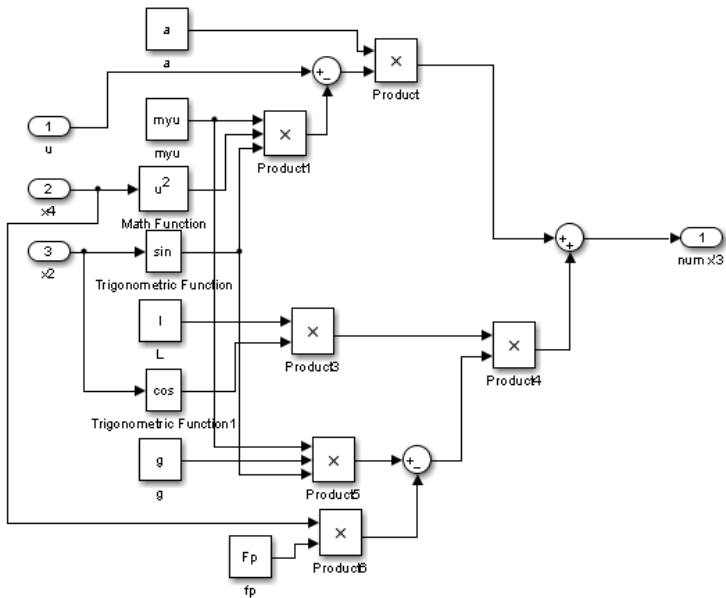
## LAMPIRAN B

### B.1 Blok Diagram Simulink

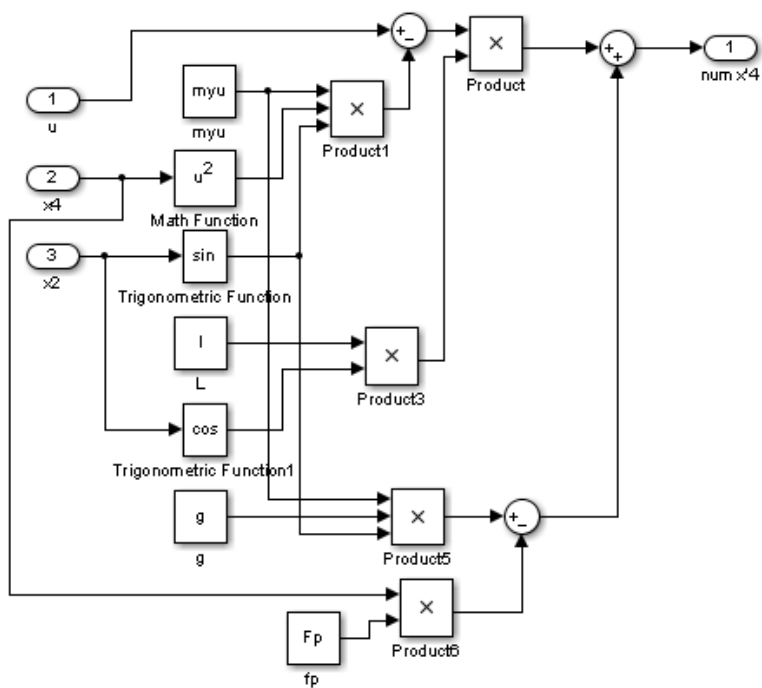
#### 1. Blok SPK



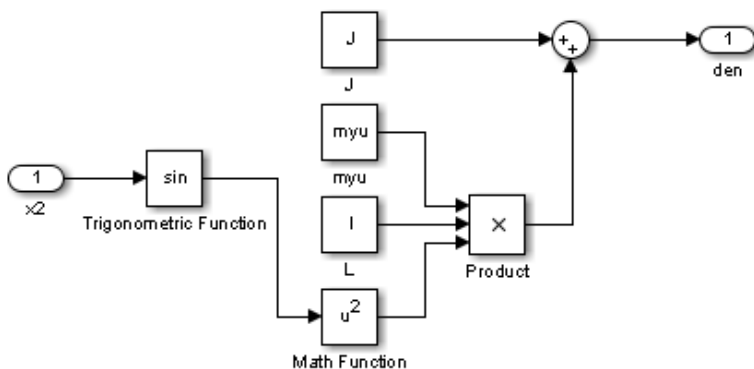
#### 2. Blok Numerator $x'_3$



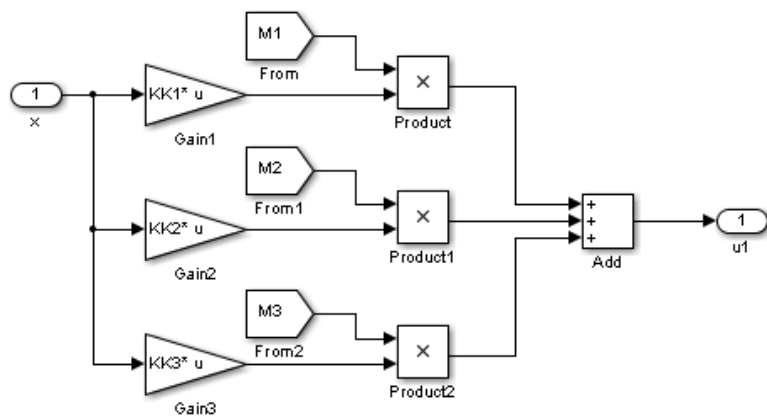
### 3. Blok Numerator $x'_4$



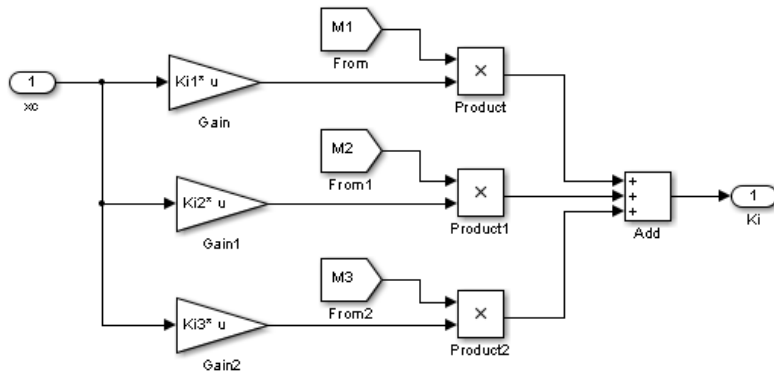
#### 4. Blok Denominator



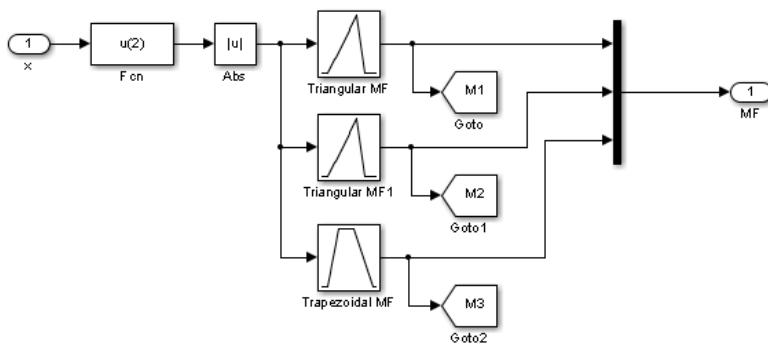
#### 5. Blok SKE



## 6. Blok Ki

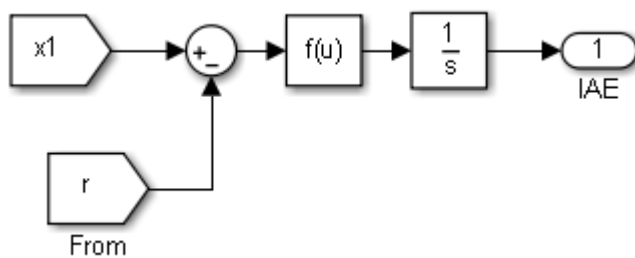


## 7. Blok MF





8. Blok IAE



### B.3 Program Untuk Linearisasi dan Menghitung Nilai *Gain*

```
clear
clc
J=0.0135;
Fp=0.0001;
g=9.8;
l=0.0168;
mc=1.12;
mpw=0.095;
mps=0.025;
mp=mpw+mps;
a=(J/(mc+mp))+l^2;
myu=(mc+mp)*l;

%Linearisasi SPK
[A1,B1,C1,D1]=linmod('PlantSPK',[0 0 0 0]','0)    %Titik
kerja 0 radian
[A2,B2,C2,D2]=linmod('PlantSPK',[0 0.3 0 0]','0) %Titik
kerja 0.3 radian
[A3,B3,C3,D3]=linmod('PlantSPK',[0 0.5 0 0]','0) %Titik
kerja 0.5 radian

%Eigenvalue A1,A2,A3
e1=eig(A1)
e2=eig(A2)
e3=eig(A3)

%Augmented Matrikx
C=[1 0 0 0];

%Matriks Augmentasi
Aaug1=[A1 zeros(4,1);-C 0]
Baug1=[B1;0]
Aaug2=[A2 zeros(4,1);-C 0]
Baug2=[B2;0]
Aaug3=[A3 zeros(4,1);-C 0]
Baug3=[B3;0]
% radius=72
% centered=145

radius=92
centered=185

% radius=32
% centered=65
```

```

disp('Program LMI Untuk Mencari Nilai Gain Optimal dan
Uji Kestabilan');
disp(' ');

%Insialisasi LMI
setlmis([ ]);
Q=lmivar(1,[5 1]);
Y1=lmivar(2,[1 5]);
Y2=lmivar(2,[1 5]);
Y3=lmivar(2,[1 5]);

%LMI Condition 1 dgn i=1,2,...,r
%i=1
lmiterm([1 1 1 Q],Aaug1,1,'s'); % LMI #1:  $A1*Q+Q*A1'$ 
lmiterm([1 1 1 Y1],Baug1,-1,'s'); % LMI #1:  $-B1*Y1-$ 
                                      $Y1'*B1'$ 

%i=2
lmiterm([2 1 1 Q],Aaug2,1,'s'); % LMI #2:  $A2*Q+Q*A2'$ 
lmiterm([2 1 1 Y2],Baug2,-1,'s'); % LMI #2:  $-B2*Y2-$ 
                                      $Y2'*B2'$ 

%i=3
lmiterm([3 1 1 Q],Aaug3,1,'s'); % LMI #3:  $A3*Q+Q*A3'$ 
lmiterm([3 1 1 Y3],Baug3,-1,'s'); % LMI #3:  $-B3*Y3-$ 
                                      $Y3'*B3'$ 

%LMI Condition 2 dgn i<j<=r
%i=1 dan j=2
lmiterm([4 1 1 Q],Aaug1,0.5,'s'); % LMI #4:  $A1*Q+Q*A1'$ 
lmiterm([4 1 1 Y2],Baug1,-0.5,'s'); % LMI #4:  $-B1*Y2-$ 
                                      $Y2'*B1'$ 

lmiterm([4 1 1 Q],Aaug2,0.5,'s'); % LMI #4:  $A2*Q+Q*A2'$ 
lmiterm([4 1 1 Y1],Baug2,-0.5,'s'); % LMI #4:  $-B2*Y1-$ 
                                      $Y1'*B2'$ 

%i=2 dan j=3
lmiterm([5 1 1 Q],Aaug2,0.5,'s'); % LMI #5:  $A2*Q+Q*A2'$ 
lmiterm([5 1 1 Y3],Baug2,-0.5,'s'); % LMI #5:  $-B2*Y3-$ 
                                      $Y3'*B2'$ 

lmiterm([5 1 1 Q],Aaug3,0.5,'s'); % LMI #5:  $A3*Q+Q*A3'$ 
lmiterm([5 1 1 Y2],Baug3,-0.5,'s'); % LMI #5:  $-B3*Y2-$ 
                                      $Y2'*B3'$ 

%LMI Condition 3 dgn i=j=1,2,...,r
%i=j=1
lmiterm([6 1 1 Q],radius,-1,'s'); % LMI #6:  $-Q*radius$ 
lmiterm([6 2 1 Q],centered,1); % LMI #6:  $centered*Q$ 
lmiterm([6 2 1 Q],Aaug1,1); % LMI #6:  $A1*Q$ 
lmiterm([6 2 1 Y1],-Baug1,1); % LMI #6:  $-B1*Y1$ 
lmiterm([6 2 2 Q],radius,-1,'s'); % LMI #6:  $-Q*radius$ 

```

```

%i=j=2
lmiterm([7 1 1 Q],radius,-1,'s') % LMI #7: -Q*radius
lmiterm([7 2 1 Q],centered,1); % LMI #7: centered*Q
lmiterm([7 2 1 Q],Aaug2,1); % LMI #7: A2*Q
lmiterm([7 2 1 Y2],-Baug2,1); % LMI #7: -B2*Y2
lmiterm([7 2 2 Q],radius,-1,'s'); % LMI #7: -Q*radius
%i=j=3
lmiterm([8 1 1 Q],radius,-1,'s') % LMI #8: -Q*radius
lmiterm([8 2 1 Q],centered,1); % LMI #8: centered*Q
lmiterm([8 2 1 Q],Aaug3,1); % LMI #8: A3*Q
lmiterm([8 2 1 Y3],-Baug3,1); % LMI #8: -B3*Y3
lmiterm([8 2 2 Q],radius,-1,'s'); % LMI #8: -Q*radius

%LMI Condition 3
lmiterm([-9 1 1 Q],1,1); % LMI #6: Q

lmis=getlmis;
[tmin,xfeas]=feasp(lmis);

%===== Hasil matriks Q, Y1, Y2, P, K1, K2, dan K3
=====
Q=dec2mat(lmis,xfeas,Q);
Y1=dec2mat(lmis,xfeas,Y1);
Y2=dec2mat(lmis,xfeas,Y2);
Y3=dec2mat(lmis,xfeas,Y3);

P=inv(Q)
K1=Y1*P
K2=Y2*P
K3=Y3*P

KK1=K1(1:4)
KK2=K2(1:4)
KK3=K3(1:4)

Ki1=K1(5)
Ki2=K2(5)
Ki3=K3(5)
%===== Cek matrik closed loop =====
Z1=Aaug1-Baug1*K1;
Z2=Aaug2-Baug2*K2;
Z3=Aaug3-Baug3*K3;

eig_1=eig(Z1)
eig_2=eig(Z2)
eig_3=eig(Z3)

```

## **RIWAYAT HIDUP**



Penulis bernama lengkap Rizki Wijayanti, lahir di Probolinggo pada tanggal 8 April 1993. Pada tahun 2005 penulis menyelesaikan masa belajar di SD Kotaanyar I. Penulis melanjutkan pendidikan di SMPN 1 Paiton, dan menyelesaikan masa belajar pada tahun 2008. Kemudian penulis melanjutkan masa belajar di SMAN 1 Kraksaan. Pada tahun 2011, penulis melanjutkan studi D3 di Politeknik Negeri Malang dengan program studi Teknik Telekomunikasi dan lulus pada tahun 2014. pada tahun 2015 penulis melanjutkan studi di S1 Teknik Elektro ITS dan memilih bidang studi Teknik Sistem Pengaturan.